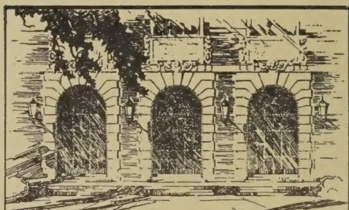


LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
Rue du Jardinet, n° 12.

LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL,

RÉDIGÉES

D'APRÈS LES MÉTHODES ET LES OUVRAGES PUBLIÉS OU INÉDITS

DE M. A.-L. CAUCHY,

Membre de l'Institut (Académie des Sciences), de la Société royale de Londres, etc.,

François Napoleon Marie

PAR M. L'ABBÉ MOIGNO.

Tome 1er. — Calcul différentiel.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1840.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

SECONDE PARTIE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES OU RECHERCHES DES PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES, DES COURBES A DOUBLE COURBURE ET DES SURFACES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

J'avais conçu depuis long-temps un vif desir de contribuer de tout mon pouvoir à l'avancement des sciences dont l'étude a fait l'une des plus heureuses occupations de ma vie; mais j'étais encore incertain sur la marche que j'avais à suivre pour atteindre ce but, lorsque plusieurs savants qui veulent bien m'honorer de leur amitié se réunirent pour me persuader que je rendrais un service éminent à l'enseignement des mathématiques si j'arrivais à populariser les belles et rigoureuses méthodes du plus habile de nos géomètres. Je me suis laissé convaincre sans effort; j'avais eu moi-même cette pensée; je savais d'ailleurs que M. Cauchy, qui, à la qualité glorieuse d'élève, me permet d'ajouter celle plus glorieuse encore d'ami, m'accepterait volontiers pour intermédiaire et pour écho dans ses savantes communications avec le public.

On apprécie généralement les grands et beaux travaux de M. Cauchy sur la théorie des nombres, sur la mécanique céleste, et sur la théorie de la lumière. Le monde savant a applaudi et applaudit bien plus encore aujourd'hui aux admirables mémoires par lesquels il a reculé toutes les limites de la science; mais il me semble qu'on ignore ce que l'enseignement classique des mathématiques lui doit de perfectionnements inespérés. Depuis plus de trente-quatre ans, celui qu'on affectait naguère d'appeler un jeune professeur, n'a pas cessé de combler quelqu'une des lacunes que présente l'enseignement élémentaire des sciences. On l'a vu chaque année substituer des méthodes simples et rigoureuses aux méthodes empiriques et incomplètes que l'on gémit de rencontrer jusque dans des auteurs très estimés. La justice et la reconnaissance me font un devoir de prouver ce que j'avance.

M. Cauchy a rédigé sur des bases nouvelles, et l'on sait à quelle occasion, des traités élémentaires d'Arithmétique et de Géométrie; on aime à voir un grand génie, inspiré par un noble dévouement, suspendre la poursuite de ses brillantes découvertes pour rendre accessibles à un jeune et royal exilé les importants secrets des sciences.

Si de l'arithmétique et de la géométrie nous passons à l'algèbre et à l'analyse algébrique, nous verrons M. Cauchy lutter sans cesse contre des difficultés qui, jusqu'à lui, avaient semblé grandir avec la science. Il commence d'abord par substituer des dé-

finitions précises, des démonstrations rigoureuses, aux paralogismes et aux cercles vicieux qui servent malheureusement d'introduction au plus grand nombre des traités d'analyse; puis c'est une succession non interrompue d'améliorations longtemps attendues en vain. La science reçoit de lui tour à tour, 1° une méthode générale de résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, méthode plus élégante et plus facile que celle de Laplace; 2° une théorie nouvelle et très simple des combinaisons et des nombres figurés que MM. Mayer et Choquet ont introduite en partie dans leur Traité d'Algèbre; 3° une démonstration, aussi élémentaire qu'elle peut l'être, du théorème fondamental que toute équation a une racine; 4° une théorie très ingénieuse des fonctions symétriques, qui permet de calculer directement, à l'aide de simples divisions algébriques, une fonction symétrique quelconque des racines d'une équation donnée; 5° un moyen sûr d'éviter l'équation aux carrés des différences et d'obtenir immédiatement, par un calcul arithmétique, quand les coefficients de l'équation primitive sont des nombres entiers, une limite inférieure à la plus petite différence entre les racines réelles de cette équation ou entre les modules de ses racines imaginaires; 6° la première solution connue du problème proposé par Lagrange sur la détermination exacte du nombre des racines réelles d'une équation algébrique; 7° une théorie entièrement neuve, conduisant à des démonstrations

simples et directes des beaux théorèmes de Descartes, de Dubuat, de Budan, de Fourier et de Sturm, sur la détermination exacte ou approchée des racines réelles d'une équation donnée; 7° un théorème nouveau et vraiment extraordinaire, qui donne le nombre des racines imaginaires dont la partie réelle et la partie imaginaire sont comprises entre des limites données, théorème qui contient, comme cas particulier, le théorème de Sturm et tous les théorèmes analogues; 8° une méthode rigoureuse pour le calcul par approximations successives des racines d'une équation numérique quelconque: cette méthode, qui se réduit à celle de Newton quand cette dernière est applicable, donne réellement à chaque opération une approximation plus grande; 9° des considérations importantes sur la convergence des séries, et deux règles très simples pour l'appréciation de cette convergence; 10° la solution d'un grand nombre de questions difficiles d'analyse.

Je me propose de réunir sous peu de jours, dans un petit volume, l'ensemble de ces perfectionnements; ce sera une exposition nouvelle et très élémentaire de la théorie générale des équations, et du grand problème de la résolution des équations numériques.

Nous devons encore à M. Cauchy une rédaction complétement neuve des deux trigonométries rectiligne et sphérique, et de l'application de l'algèbre à la géométrie. Il a eu l'heureuse idée de ramener l'étude des lignes et des surfaces du second degré à la

discussion facile et simple d'une équation à trois termes $r^2+2tr+u-k=0$. Il suffit alors de quelques raisonnements évidents, de quelques calculs élégants, sans transformation aucune des coordonnées, pour faire ressortir toutes les propriétés de ces lignes et de ces surfaces. S'il s'agit par exemple des surfaces du second degré, on arrive dans deux ou trois leçons, en suivant une marche très uniforme et tout-à-fait analytique, aux équations du centre, du plan diamétral, des plans diamétraux principaux, des axes principaux, du plan tangent, des sections rectilignes, des sections circulaires, des foyers; aux relations qui unissent les axes principaux aux diamètres conjugués, etc., etc. Il me tarde aussi, en publiant cette admirable méthode, de simplifier l'enseignement de la géométrie analytique.

Quant à ce qui concerne les traités de Calcul différentiel, de Calcul intégral et de Mécanique dont j'entreprends aujourd'hui la publication, il suffira de les parcourir pour se convaincre qu'ils diffèrent totalement des traités publiés par d'autres auteurs, qu'ils sont presque en entier l'œuvre de l'illustre géomètre. Quand il emprunte à ses devanciers les énoncés des théorèmes, le mode au moins de démonstration est à lui. On verra mieux ce qui lui appartient plus en propre dans l'analyse que je placerai à la tête de chacun des volumes de cet ouvrage. Je n'ai à m'occuper aujourd'hui que du Calcul différentiel.

Ce Traité doit être regardé comme une édition

nouvelle, mais considérablement augmentée, des Leçons de M. Cauchy. Je l'ai fait aussi complet qu'il m'a été possible; ce n'était pas assez qu'il fût au niveau de la science telle que l'avaient faite jusqu'ici les traités classiques; ces traités ne préparaient pas suffisamment à la lecture des ouvrages des grands maîtres; il fallait nécessairement donner à l'enseignement un nouvel essor : j'ai essayé de le faire. J'ai fait entrer dans la composition de ce premier volume les ouvrages suivants de M. Cauchy : 1° les *Leçons sur le Calcul différentiel*, deuxième édition, Paris, 1829; 2° les *Leçons sur l'application du Calcul infinitésimal à la Géométrie*, t. 1er, Paris, 1826; 3° un Mémoire publié dans le troisième volume des *Exercices de mathématiques*, sur les surfaces que peuvent engendrer, en se mouvant dans l'espace, des lignes droites ou courbes de forme constante ou variable; 4° un Mémoire sur la théorie des suites et les lois de leur convergence, imprimé d'abord dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, et plus tard, avec des additions importantes, dans la neuvième livraison des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*; 5° un Mémoire sur l'interpolation, d'abord lithographié, puis inséré dans le troisième volume du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville; 6° divers Mémoires sur le calcul des résidus, faisant partie des *Exercices de mathématiques*; 7° un Traité inédit du calcul aux différences finies; 8° enfin un cahier manuscrit que M. Cauchy a bien voulu me confier, et qui

devait former le troisième volume des *Applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie*. L'ensemble de ces Traités et Mémoires formait plus de 1040 pages in-4°; pour le resserrer dans les limites d'un seul volume in-8°, il a fallu changer presque entièrement la rédaction. J'avais à la rendre à la fois plus concise et plus élémentaire; puissé-je avoir réussi!

Ce qui, je l'espère, attirera surtout l'attention dans ce nouvel ouvrage, c'est la rigueur et la netteté des démonstrations. La rigueur est le caractère, j'oserais presque dire le caractère distinctif de la manière de M. Cauchy; son esprit éminemment exact et pénétrant n'a jamais pu s'accommoder de ces demi-preuves auxquelles tant d'autres géomètres se sont résignés. Cette rigueur n'est pas ennemie de la simplicité, elle en est au contraire la compagne inséparable. Une démonstration incomplète est une difficulté cachée, mais non résolue, qui tôt ou tard se fera jour et deviendra la source de difficultés plus grandes encore; une preuve rigoureuse est toujours, au contraire, une difficulté vaincue. Avant que M. Cauchy publiât ses Traités, les démonstrations des théorèmes fondamentaux du Calcul différentiel reposaient trop souvent sur la considération de certaines séries que l'on employait sans discernement, sans avoir pu s'assurer qu'elles étaient convergentes, ou qu'elles étaient l'expression exacte des fonctions qui semblaient leur avoir donné naissance. C'était un véritable abus contre lequel M. Cauchy n'a pas cessé de

réclamer ; il n'a jamais eu recours à un développement en série sans avoir d'abord mis en évidence sa possibilité, sa forme, sa convergence, son existence en un mot, comme expression de telle fonction donnée. Je crois pouvoir affirmer sans crainte qu'en étudiant ou en enseignant ces Leçons, on ne rencontrera pas une seule démonstration qui ne satisfasse pleinement l'esprit. Je suis même convaincu que dès qu'on se sera familiarisé avec les notations, d'ailleurs très simples et très élégantes, de M. Cauchy, on sera forcé de reconnaître que ses méthodes sont les plus élémentaires de toutes.

J'ai cru devoir prendre pour base et pour point de départ du Calcul différentiel la considération de la fonction dérivée, dont on se fait toujours une idée nette et précise en disant qu'elle est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable indépendante. De la définition de la dérivée je passe à la différentielle, qui est le produit de la dérivée par l'accroissement arbitraire attribué à la variable indépendante. Je n'ai pas craint de dire que cette différentielle, regardée par Euler comme rigoureusement égale à o, est en réalité une quantité indéterminée finie ou indéfiniment petite, suivant que l'accroissement arbitraire attribué à la variable indépendante est lui-même fini ou indéfiniment petit : de fait cependant, dans le calcul différentiel considéré comme distinct du calcul aux différences finies, la différentielle est toujours une quantité très petite. M. Cauchy a cru, dans ces dernières années,

devoir donner de la différentielle une définition directe, immédiate, indépendante de la considération des fonctions dérivées. Se rapprochant des idées de Maclaurin et de d'Alembert, il appelle différentielles des quantités dont les rapports sont équivalents aux dernières raisons des accroissements que peuvent prendre simultanément les variables. En partant de cette définition on peut calculer les différentielles sans passer par les dérivées, comme je l'ai fait voir avec détail dans la quatorzième leçon; mais je n'ai pas voulu la prendre pour point de départ : elle n'est réellement avantageuse que lorsqu'il est question des fonctions de plusieurs variables indépendantes; j'aurais craint, en l'employant trop tôt, de jeter quelque obscurité sur les principes du Calcul différentiel qu'il importait tant d'éclaircir.

On verra que je me suis efforcé de faire comprendre parfaitement le sens des notations du Calcul différentiel et de leur enlever tout ce qu'elles pouvaient présenter d'obscur ou d'ambigu. Je regrette de n'avoir pas banni complétement de ces leçons les notations vagues et incommodes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}dx$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx$, pour leur substituer les notations plus tranchées $y'_x = D_x y$, $d_x y$, $z'_x = D_x z$, $z'_y = D_y z$, $d_x z$, $d_y z$, etc.

Puisque le développement des fonctions en séries n'est qu'une des nombreuses applications du Calcul différentiel, j'ai cru, toujours en suivant M. Cauchy, et quoique l'opinion contraire ait été soutenue

par Lagrange, dans son remarquable et célèbre ouvrage sur le calcul des fonctions, qu'il importait d'établir les principes fondamentaux de cette branche importante de l'analyse, indépendamment de ce développement ou indépendamment de la formule de Taylor. M. Cauchy ramène dans tous les cas le calcul des dérivées à la considération des valeurs que prennent pour $x = 0$ les trois expressions $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, $\frac{L(1+x)}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$; cette méthode paraît au premier abord trop subtile, elle n'est réellement qu'ingénieuse, et il est presque impossible de l'éviter sans tomber dans quelque cercle vicieux, ou sans cesser de marcher du simple au composé. Il est d'ailleurs utile de montrer de bonne heure aux élèves le parti qu'on peut tirer d'une heureuse transformation analytique. Dans une Note sur la limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, insérée dans le dernier numéro du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, M. Liouville dénonce comme insuffisantes les démonstrations dont on fait ordinairement usage pour prouver que cette limite a pour valeur le nombre $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} +$ etc. J'aime à croire que cette observation ne s'étend pas à la marche suivie par M. Cauchy, et que M. Liouville, dans sa pensée du moins, a fait une exception en faveur de son illustre confrère. Dans tous les cas, comme cette limite est pour M. Cauchy la base du Calcul

différentiel, je ne puis me dispenser de faire ressortir en peu de mots la rigoureuse exactitude de sa méthode. Il n'a pas à prouver que la limite de l'expression $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ est égale au nombre e, cette vérité est pour lui le résultat d'une définition, car il appelle e cette limite, qui, toujours la même quel que soit x, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, est une quantité finie plus grande que 2 et plus petite que 3. La seule chose à démontrer, pour M. Cauchy, c'est que le nombre e ainsi défini est égal à la somme $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+$etc., ce qu'il fait très rigoureusement quand, après avoir prouvé que la série $e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+$ etc... est convergente quel que soit x, il y fait $x=1$.

Au point de vue où je me suis placé avec M. Cauchy, la cinquième leçon, sur les relations qui existent entre les fonctions d'une seule variable et leurs dérivées, est la plus essentielle de toutes. Elle contient réellement en germe le Calcul différentiel et le Calcul intégral tout entier, avec leurs plus importantes applications. Quand les élèves l'auront bien comprise, rien ne pourra plus les arrêter. Les démonstrations des deux théorèmes fondamentaux de cette leçon me semblent ne laisser rien à desirer sous le rapport de la simplicité et de la clarté; elles demandent cependant à être l'objet d'une étude sérieuse, car la généralité de ces théorèmes leur donne je ne sais quelle apparence d'abstraction qui effraie au premier abord.

J'ai rangé dans le meilleur ordre possible les applications analytiques du Calcul différentiel; on n'étudiera pas sans intérêt et sans fruit la leçon sur les quantités infiniment petites, et les règles dont l'ensemble constitue la méthode infinitésimale. Dans les dernières années de sa vie, le grand géomètre enlevé trop tôt à la France, dont il faisait la gloire, M. Poisson, déclara la guerre à la théorie des fonctions telle que l'avait faite le génie de Lagrange, et s'arma de toute sa puissance pour ramener le monde savant à la méthode infinitésimale. Il affirma que les infiniment petits ne sont pas seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres, mais qu'ils ont une existence réelle, c'est-à-dire qu'il existe des grandeurs qui ne sont point nulles, qui même peuvent être doubles, triples, quadruples d'autres grandeurs, et sont cependant moindres actuellement que toute grandeur donnée. Quoique appuyées d'une si imposante autorité, ces assertions furent vivement combattues et repoussées : elles n'énonçaient pas seulement un mystère dont la raison aurait pu s'effrayer sans avoir le droit de le rejeter; beaucoup d'esprits judicieux y virent une évidente impossibilité. En effet, ou ces grandeurs, plus petites que toute grandeur donnée, sont encore étendues et divisibles, ou elles sont simples et indivisibles : dans le premier cas leur existence est une chimère, puisque, nécessairement plus grandes que leur moitié, leur quart, etc., elles ne sont pas moindres actuellement que toute grandeur donnée;

dans la seconde hypothèse, elles ne seraient plus des grandeurs mathématiques, les adopter, ce serait renoncer à l'idée du continu divisible à l'infini, point de départ nécessaire et fondement de toutes les sciences mathématiques. Quelques applications moins heureuses de ces principes, dont le plus grand inconvénient était de ramener trop ouvertement la science à son berceau, firent mieux comprendre la nécessité des méthodes plus rigoureuses dont MM. Poinsot et Cauchy s'étaient faits les défenseurs. Pour ces géomètres, un infiniment petit n'est qu'une quantité variable ou indéterminée qui a zéro pour limite, qui peut décroître indéfiniment sans s'arrêter à une valeur appréciable; une quantité qui, prise isolément, peut être conçue plus petite que toute quantité donnée. Il suffit de cette définition pour mettre hors de doute les règles fondamentales de la méthode infinitésimale. Convenablement appliquées, ces règles ne peuvent pas égarer; si j'ai évité d'en faire usage, c'est uniquement parce que leur emploi entraîne nécessairement des considérations préliminaires assez délicates, qui font perdre à la méthode infinitésimale le seul avantage qu'on semblait ne pouvoir pas lui disputer, la promptitude avec laquelle elle conduit au but. Pour faire mieux comprendre ma pensée, je me hâte de recourir à un exemple. Si l'on veut obtenir par la méthode infinitésimale la différentielle de l'arc s d'une courbe, il ne suffit pas de remarquer que l'accroissement Δs de l'arc étant sensiblement égal à sa corde, on a

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}},$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Pour que cette marche soit admissible, il faut nécessairement démontrer avant tout que l'accroissement de l'arc diffère de la corde d'une quantité infiniment petite du second ordre, ou du moins que le rapport de l'accroissement de l'arc à sa corde a pour limite l'unité. Entravée par cette démonstration et ramenée aux proportions de la méthode que nous avons adoptée dans notre Traité, la méthode infinitésimale devient, ce semble, rigoureuse, mais en cessant d'être expéditive, et l'on est forcé de convenir que, très avantageuse quand il s'agit de prévoir ou de retrouver les résultats, elle ne constitue pas à elle seule une méthode d'exposition suffisamment exacte et classique.

Pour me conformer à un usage reçu et distinguer l'une de l'autre les formules qui donnent les développements de $F(x+h)$ suivant les puissances ascendantes de h, et de $F(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, j'ai appelé la première formule de Taylor, la seconde formule de Maclaurin; mais en réalité la gloire de ces deux formules, qu'on a voulu aussi attribuer à un autre géomètre anglais, appartient tout entière à Taylor, comme le reconnaissent ouvertement Maclaurin et Stirling dans plusieurs endroits de leurs ouvrages.

Après la démonstration si simple et si ingénieuse que M. Cauchy a donnée de ces deux formules fon-

damentales, je ne concevrais pas qu'on pût recourir encore à la méthode trop imparfaite et trop inexacte des coefficients indéterminés, qui suppose tout et prouve seulement que dans tous les cas où les fonctions $F(x)$ et $F(x+h)$ pourront être exprimées par des séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x ou de h, ces séries coïncideront avec la série de Maclaurin ou avec la série de Taylor.

On renvoie ordinairement au calcul intégral la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, et pour effectuer cette décomposition on a recours encore à la mauvaise méthode des coefficients indéterminés; M. Cauchy a montré depuis long-temps que cette décomposition est une simple extension de la formule de Taylor au cas où la fonction qu'il s'agit de développer, suivant les puissances ascendantes de $x-a$, devient infinie pour $x=a$.

La douzième leçon, sur les formules de Moivre, sur la définition ou la détermination du sens qu'il faut attacher aux expressions x^a, A^x, Lx, $\sin x$, $\cos x$, dans le cas où la variable x prend une valeur imaginaire, mérite aussi beaucoup d'attention. Les notions qui s'y trouvent réunies sont malheureusement fort peu répandues, et je regrette de n'avoir pas pu entrer à ce sujet dans de plus grands détails, que l'on trouvera du reste dans l'analyse algébrique de M. Cauchy.

Je me félicite d'avoir pu, dans la dix-septième leçon, donner une démonstration élémentaire de

cet admirable théorème de M. Cauchy, qui ramène la loi de convergence des séries à la loi de continuité des fonctions qui leur ont donné naissance, et suivant lequel une fonction quelconque, réelle ou imaginaire, d'une variable réelle ou imaginaire x, est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, tant que le module de cette variable conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction et sa dérivée cessent d'être finies et continues, c'est-à-dire cessent de prendre pour chaque valeur de la variable une valeur unique et finie, croissant ou décroissant infiniment peu avec cette même variable. Ce beau théorème, en ramenant le développement d'une fonction quelconque $F(x)$ à celui de l'expression très simple $\frac{z}{z-x}$, fournit, 1° une démonstration très remarquable de la formule de Taylor; 2° une expression nouvelle du reste de cette série. Il s'étend d'ailleurs avec une extrême facilité au cas de plusieurs variables indépendantes.

On ne trouve dans aucun ouvrage élémentaire la démonstration de la belle série donnée par Lagrange pour le développement des fonctions implicites; il faut même nécessairement convenir que les raisonnements par lesquels on a essayé jusqu'ici d'établir cette série laissent beaucoup à desirer; on admettait sans preuves la possibilité et la forme de ce développement, on prétendait mettre son existence hors de doute, indépendamment de la considé-

ration des valeurs attribuées à la variable, ce qui ne peut être, puisque la série n'est convergente qu'entre certaines limites quelquefois très rapprochées. Il m'en aurait trop coûté de laisser dans l'enseignement une si grande lacune; cédant à mes vives instances, M. Cauchy, pour qui lutter contre une difficulté est déjà l'avoir vaincue, est heureusement parvenu à étendre aux fonctions implicites les règles de convergence qu'il avait établies pour les fonctions explicites, et à donner de la série de Lagrange une démonstration aussi neuve que rigoureuse, qui, je n'en doute pas, sera bien accueillie de tous les géomètres. L'application qu'il a faite de cette théorie nouvelle à une question importante, résolue avec de grands efforts par le célèbre Laplace dans deux longs Mémoires, mettra mieux en évidence ses immenses avantages.

On a souvent besoin, dans la théorie du contact des courbes et dans la solution de plusieurs autres questions d'analyse, de comparer entre elles les dérivées de deux ou de plusieurs variables indépendantes prises successivement par rapport à diverses variables considérées comme indépendantes. Les bases de cette comparaison manquent dans la plupart des ouvrages élémentaires, j'ai essayé de la rendre rigoureuse et facile à l'aide d'une suite de théorèmes importants dont l'ensemble forme la première partie de la dix-neuvième leçon. Pour ne renvoyer au Calcul intégral rien de ce qui appartient proprement au Calcul différentiel, j'ai pris soin, dans cette même

leçon, d'établir les principes et les formules qui servent à l'élimination des constantes ou des fonctions arbitraires avec l'aide d'un certain nombre de différentiations.

Je ne m'étendrai pas, dans cette Introduction, sur la seconde partie du Calcul différentiel; elle est, plus encore que la première, l'ouvrage de M. Cauchy; dans l'impossibilité de mieux faire, j'ai dû souvent me borner à le copier. Après m'être ainsi effacé, j'aurai acquis le droit de dire que l'ensemble de ces applications géométriques me semble véritablement un chef-d'œuvre. Je ne crois pas qu'on puisse concevoir plus de précision et de clarté dans les définitions, plus de simplicité et de rigueur dans les démonstrations, plus d'élégance et de rapidité dans les transformations analytiques. Dans ce bel ensemble, je recommanderai comme plus spécialement dignes d'attention, 1° les considérations si ingénieuses par lesquelles M. Cauchy est parvenu à établir les équations que doivent vérifier les coordonnées des points singuliers; 2° la recherche de la courbure, du rayon de courbure et du centre de courbure d'une courbe plane ou quelconque; 3° l'appréciation du contact des courbes ou des surfaces courbes; 4° la détermination des rayons de courbure et des lignes de courbure des surfaces; 5° la recherche des équations finies ou aux différentielles partielles, des surfaces que peuvent engendrer en se mouvant dans l'espace des lignes droites et courbes de forme constante ou variable, soit que ces surfaces doivent passer par

une directrice déterminée, soit qu'elles doivent être circonscrites à une surface donnée ; 6° enfin la théorie des lignes et des surfaces enveloppes.

Le calcul des résidus, création de M. Cauchy, est devenu entre ses mains un puissant instrument d'investigations nouvelles et profondes. Il en a déduit des procédés rapides pour la détermination d'un nombre immense d'intégrales définies et des méthodes d'intégration spécialement applicables aux équations que l'on rencontre le plus souvent dans la solution des problèmes de physique mathématique. J'ai cru dès-lors rendre service aux géomètres en ajoutant une leçon sur les principes élémentaires de ce calcul, complément nécessaire du Calcul différentiel. Le calcul direct aux différences finies avait aussi naturellement sa place dans ce premier volume; j'ai été heureux de trouver dans les manuscrits de M. Cauchy tous les matériaux de la quarante-cinquième leçon. On verra avec plaisir comment M. Cauchy, après avoir ramené la recherche de la différence finie de l'ordre n au cas très simple où la fonction donnée $F(x)$ est égale à a^x, déduit les deux formules fondamentales du calcul aux différences finies de la considération des équations symboliques.

Deux Notes enfin complètent ce volume. La première a pour objet les formules nouvelles d'interpolation de M. Cauchy, qui sont peut-être l'un de ses plus beaux titres de gloire, et qui bientôt, je l'espère, seront exclusivement adoptées, parce qu'elles peuvent seules résoudre le problème de l'interpola-

tion avec une approximation certaine et suffisante.

Je n'aurais pas assez fait pour la clarté de cet ouvrage si je ne donnais pas quelques explications au sujet d'un procédé d'élimination employé presque à chaque page et à l'aide duquel on échappe souvent à d'immenses calculs. Quand il s'agit de déduire d'un certain nombre d'équations les valeurs d'un nombre égal d'inconnues, M. Cauchy a presque toujours soin de ramener ces équations à une suite de fractions égales dont les numérateurs, toutes les fois que la chose est possible, renferment la première puissance d'une seule des inconnues. Cette transformation faite, il achève l'élimination avec une dextérité admirable, en égalant chacune de ces fractions multipliée, s'il est nécessaire, par un facteur convenablement choisi, au rapport que l'on obtient en divisant la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs, ou la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs par la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs. Le choix des facteurs n'est jamais entièrement arbitraire ni par conséquent difficile, parce que les équations mêmes de la question indiquent toujours ce qu'ils doivent être. Pour mieux faire comprendre cette méthode si ingénieuse et si féconde, reprenons un instant l'exemple de la page 279. Il s'agit de trouver le rayon de courbure et les coordonnées polaires du centre de courbure, d'une courbe plane quelconque; les trois inconnues r_1, u_1 et ρ doivent satisfaire à l'équation du cercle osculateur et à ses équa-

tions différentielles du premier et du second ordre : ces trois équations peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\ [r_1 \sin(u-u_1)]^2 + [r_1 \cos(u-u_1) - r]^2 = \rho^2,$$
$$(2)\ rr_1 \sin(u-u_1)\,du - [r_1 \cos(u-u_1) - r]\,dr = 0,$$
$$(3)\ r_1 \sin(u-u_1)[rd^2u + 2dudr] - [r_1\cos(u-u_1) - r](d^2r - rdu^2) = -(dr^2 + r^2du^2);$$

on tire de la seconde

$$\frac{r_1 \cos(u-u_1) - r}{rdu} = \frac{r_1 \sin(u-u_1)}{dr}.$$

Les inconnues r_1, u_1 ne sont pas ici au premier degré, mais il est facile de voir que dès qu'on aura $r_1 \cos(u-u_1)$ et $r_1 \sin(u-u_1)$, on aura immédiatement $r_1 = \sqrt{r_1^2 \cos^2(u-u_1) + r_1^2 \sin^2(u-u_1)}$ et $\sin(u-u_1)$ ou $\cos(u-u_1)$, et par suite u_1. De plus l'équation (1) montre qu'en divisant la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs des fractions qui précèdent par la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs, on aura le rapport très simple $\frac{\rho}{\sqrt{dr^2 + r^2du^2}}$, dont le numérateur renferme la troisième inconnue ρ au premier degré. Enfin si, ayant égard à l'équation (3), et après avoir multiplié haut et bas la première des fractions par $d^2r - rdu^2$, la seconde par $rd^2u + 2dudr$, on divise la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs, les inconnues r_1 et u_1 disparaîtront et l'on obtiendra le rapport

$$\frac{dr^2 + r^2du^2}{r(drd^2u - dud^2r) + (2dr^2 + r^2du^2)\,du},$$

qui servira immédiatement au calcul des trois inconnues. Cet exemple suffit pour montrer, dans tous les cas, la marche à suivre. Il est bien choisi, car l'élimination que nous venons de faire aurait été trop pénible par d'autres procédés.

Les théorèmes sur lesquels reposent cette méthode d'élimination de M. Cauchy sont d'ailleurs évidents, car des équations

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\text{etc.}$$

on tire

$$1^{\circ}.\quad a=b\frac{a}{b},\quad a'=b'\frac{a}{b},\quad a''=b''\frac{a}{b},\ \text{etc.},$$

$$\frac{a+a'+a''+\text{etc.}}{b+b'+b''+\text{etc.}}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}\ \text{etc.};$$

$$2^{\circ}.\quad \frac{a\alpha}{b\alpha}=\frac{a'\alpha'}{b'\alpha'}=\frac{a''\alpha''}{b''\alpha''}=\frac{a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''}{b\alpha+b'\alpha'+b''\alpha''}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\ \text{etc.};$$

$$3^{\circ}.\quad \frac{a^2}{b^2}=\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{a''^2}{b''^2}=\ldots=\frac{a^2+a'^2+a''^2+\text{etc.}}{b^2+b'^2+b''^2+\text{etc.}},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}\ldots=\pm\sqrt{\frac{a^2+a'^2+a''^2+\text{etc.}}{b^2+b'^2+b''^2+\text{etc.}}}.$$

En faisant ressortir ce que j'ai trouvé de neuf et de vraiment admirable dans les travaux de M. Cauchy, j'ai accompli un devoir sacré, j'ai répondu au premier besoin de mon cœur. Qu'il me soit permis en finissant d'exprimer ma reconnaissance à quelques savants qui m'ont été grandement utiles par leurs bienveillants conseils ou par leurs écrits : à M. Lacroix, le doyen de cette génération de géomètres qui a conquis tant de gloire à notre France, et qui, par ses ouvrages si répandus,

fut mon premier maître; à M. Poinsot, qui nous a donné dans sa Statique un modèle incomparable de rédaction claire et précise que les auteurs de traités classiques doivent s'efforcer d'imiter; à M. Coriolis, dont la modestie profonde égale le grand savoir, et qui a bien voulu me confier des notes manuscrites sur le Calcul différentiel qu'il avait rédigées pour l'École Polytechnique. Je dirai mieux dans l'introduction au Calcul intégral tout ce que je dois à MM. Sturm et Liouville, qui, jeunes encore, se plaçant au premier rang des analystes, préludèrent, par d'élégants Mémoires qui leur ont ouvert les portes de l'Académie des Sciences, aux importants travaux par lesquels ils soutiennent si dignement l'honneur du premier corps savant de l'Europe.

Paris, 25 novembre 1840.

ERRATA.

Page 20, ligne 1, *au lieu de* second facteur, *lisez* second terme.

Page 32, dernière ligne, *au lieu de* $dw = (-\sin x + \sqrt{-1}\cos x)$, $dw = -w\sqrt{-1}\,dx$, *lisez* $dw = (-\sin x + \sqrt{-1}\cos x)dx$, $dw = w\sqrt{-1}\,dx$

Page 37, ligne 3, *au lieu de* $F(x)$, *lisez* $f(x)$

Page 42, lignes 5 et 6, *au lieu de* x, *lisez* x_0

Page 64, ligne 2, *au lieu de* plus petit, *lisez* plus grand

Page 71, ligne 4, *au lieu de* $\tang x$ *lisez* arc $\tang x$

Page 74, ligne dernière, *au lieu de* $\rho_n \ldots > u'_n > u''_n$, *lisez* $\rho_n \ldots \begin{matrix} > u'n \\ > u''n \end{matrix}$

Page 80, ligne 14, *au lieu de* $\frac{1}{F(x)} = \frac{(x-a)^m}{\varphi(x)}$, *lisez* $\frac{1}{F(x)} = \frac{(x-a)^m}{\varphi(x)} = 0$

Page 116, ligne 12, *au lieu de* $l\left(\frac{x}{y}\right)$, *lisez* $\frac{x}{y}$

Page 128, ligne 1, *au lieu de* $bd_x^p d_y^q d_z^r u$, *lisez* $bd_x^p d_y^q d_z^r u$ + etc.

Page 153, ligne 18, *au lieu de* $+ I_0$, *lisez* $+ nI_0$

Page 156, ligne 10, *au lieu de* $F(x)\begin{bmatrix} 1 + r^{-1}x \ldots \\ + r^{-2}x^2 \ldots \end{bmatrix}$

lisez $\frac{F(x)}{n}\begin{bmatrix} n + r^{-1}x \ldots \\ + r^{-2}x^2 \ldots \end{bmatrix}$

Page 279, lignes 19, 20, 22, *au lieu de* $r\cos(u-u_1)$, *lisez* $r_1\cos(u-u_1)$.



CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES GÉNÉRAUX ET APPLICATIONS ANALYTIQUES.

PREMIÈRE LEÇON.

Définitions. — Des variables et des fonctions continues ou discontinues, explicites ou implicites, simples ou composées. — Des limites des fonctions. — Dérivée et différentielle. — Objet du Calcul différentiel.

1. On nomme quantité variable celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle au contraire quantité constante, toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque des grandeurs variables sont tellement liées entre elles que les valeurs d'une ou de quelques-unes étant données on puisse en conclure toutes les autres, on conçoit ces diverses grandeurs exprimées au moyen d'une ou de plusieurs d'entre elles qui prennent le nom de variables indépendantes; les autres grandeurs, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des fonctions de ces variables.

2. Les fonctions sont explicites et s'expriment à l'aide des notations $y = \mathrm{F}(x)$, $y = f(x)$, $z = \mathrm{F}(x, y)$, $z = f(x, y)$, $u = \mathrm{F}(x, y, z)$, $u = f(x, y, z)$, quand les valeurs des variables dépendantes sont données immédiatement par des équations résolues : elles sont implicites lorsque les variables dépendantes sont liées aux

variables indépendantes par des équations non résolues $F(x, y,) = 0$, $f(x, y) = 0$.

Il est important de remarquer que si deux fonctions sont représentées par la même caractéristique F ou f, ou φ, ou χ, etc., elles sont formées de la même manière au moyen des variables qu'elles renferment.

3. Les fonctions se divisent, 1° en fonctions simples ou composées suivant qu'elles résultent d'une ou de plusieurs opérations effectuées sur les variables; 2° en fonctions algébriques rationnelles ou irrationnelles lorsqu'elles résultent des cinq premières opérations de l'algèbre, et en fonctions transcendantes.

4. Une fonction $y = F(x)$ est continue lorsqu'à chaque valeur de la variable répond une valeur unique et finie de la fonction, et que de plus un changement infiniment petit $h = \Delta x$ dans la valeur de la variable indépendante, produisant dans la valeur de la fonction un changement Δy infiniment peti t, la différence $\Delta y = F(x+h) - F(x) = F(x+\Delta x) - F(x)$ est infiniment petite. Si ces deux conditions ne sont pas remplie la fonction est discontinue. On appelle ici infiniment petite une quantité très petite qui a 0 pour limite, qui peut décroître indéfiniment, sans s'arrêter à une valeur appréciable, ou une quantité que l'on peut concevoir plus petite que toute quantité donnée. Les changements Δx, Δy peuvent être positifs ou négatifs, on les désigne cependant toujours sous le nom d'accroissements.

5. Lorsqu'une première variable dépend d'une ou de plusieurs quantités qui dépendent elles-mêmes d'une ou de plusieurs autres variables, on dit que la première variable est fonction de fonction. *Exemple :* si l'on a

$$z = F(y), \quad y = f(x),$$

z sera une fonction de fonction de x.

6. On appelle en général limite d'une fonction, la valeur vers laquelle elle converge lorsque la variable dont elle dépend converge elle-même vers une valeur déterminée. Cette limite peut se présenter d'abord sous une forme indéterminée, et pour la calculer il faut souvent recourir à divers artifices. Ainsi, par exemple, les fonctions

$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $y=\frac{L(1+x)}{x}$ se présentent pour $x=0$ sous les formes indéterminées 1^{∞}, $\frac{0}{0}$, et acquièrent cependant, pour la valeur 0 donnée à la variable, les valeurs finies $e=2,71828\ldots$; $Le=\frac{1}{la}$, a étant la base du système de logarithmes désignés par L, et l représentant les logarithmes pris dans le système dont la base serait e ou les logarithmes népériens et hyperboliques. La considération de ces deux limites étant extrêmement importante, nous donnerons ici la preuve de leur existence et le moyen de les calculer.

La variable x en convergeant vers 0, ou plutôt $\frac{1}{x}$ en convergeant vers l'infini, peut admettre des valeurs positives entières ou fractionnaires, ou des valeurs négatives. Examinons d'abord le premier cas.

Si $\frac{1}{x}=m$, m étant un nombre entier, on aura

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{1}{m^2}$$
$$+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\,\frac{1}{m^3}+\text{etc.},$$

ou, en effectuant la division,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)+\text{etc.},$$

lorsque x est très petit ou m très grand, tous les termes du second membre sont positifs, la limite de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ est donc un nombre plus grand que 2. De plus le second membre croîtra certainement si, après avoir négligé les termes négatifs, $-\frac{1}{m}, -\frac{2}{m}, -\frac{3}{m}, \ldots$ on remplace chacun des dénominateurs 3, 4, 5... etc., par un dénominateur plus petit 2; nous aurons donc

$$\lim.(1+x)^{\frac{1}{x}} < 2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots \text{etc.} = 3.$$

La limite de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ est donc comprise entre 2 et 3. On la désigne par la lettre e, et l'on aura de e, qui est une quantité incommensurable, une valeur très approchée en donnant à m une très grande valeur; en supposant, par exemple, $m = 1\,000\,000$, on trouve, à un cent-millième près, $e = 2{,}71828$.

Si $\frac{1}{x}$ est un nombre fractionnaire, il sera compris entre deux nombres entiers consécutifs m et $n = m+1$, et l'on aura

$$\frac{1}{x} = m+\mu = n-\nu; \quad \begin{matrix} x < \frac{1}{m} \\ x > \frac{1}{n} \end{matrix}.$$

L'expression $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ sera donc évidemment renfermée entre les deux suivantes :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{\left(1+\frac{\mu}{m}\right)},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\left(1-\frac{\nu}{n}\right)}.$$

Quand x décroît indéfiniment, ou quand m et n croissent à l'infini, les deux quantités $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ convergent l'une et l'autre vers la limite e, tandis que les exposants $1+\frac{\mu}{m}$, $1+\frac{\nu}{n}$ approchent indéfiniment de la limite 1;

il en résulte que les deux expressions $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,

et par suite l'expression intermédiaire $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ convergent encore vers la limite e.

Enfin si x devient négatif, $1+x$ sera plus petit que 1, l'on pourra poser $1+x=\frac{1}{1+\alpha}$, α étant une quantité positive qui converge elle-même vers zéro, et l'on trouvera

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1+\alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{(1+\alpha)},$$

puis en passant à la limite, $\lim.\,(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Considérons maintenant l'expression $\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x}$.

On a

$$\mathrm{L}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x},$$

donc

$$\lim.\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x}=\lim.\,\mathrm{L}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\mathrm{L}e,$$

ou, en vertu d'un théorème connu,

$$\lim.\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x}=\frac{1}{\mathrm{l}a},$$

et par suite

$$\lim. \frac{\mathrm{l}(1+x)}{x} = \mathrm{l}e = \frac{1}{\mathrm{l}e} = 1.$$

On trouvera aussi que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ a pour limite l'unité, lorsqu'on fait converger x vers la limite o. En effet, $\sin x$ est plus petit que l'arc x; l'arc à son tour est plus petit que $\tang x$ puisque le triangle formé par la tangente, la sécante et le rayon R, et qui a pour mesure $\frac{1}{2}\mathrm{R}\tang x$, est plus grand que le secteur correspondant $\frac{1}{2}\mathrm{R}x$.

On a donc

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{x} = 1, \quad \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\tang x} = \cos x.$$

Or $\cos x$ à la limite est égal à 1, donc le rapport $\frac{\sin x}{x}$ toujours compris entre deux quantités qui, à la limite, sont toutes deux égales à l'unité, aura lui-même l'unité pour limite, et nous aurons $\lim. \frac{\sin x}{x} = 1$.

7. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)}{\Delta x}$ se présente quand on fait $x = 0$ sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et acquiert néanmoins en réalité une valeur finie, qui est en général une fonction nouvelle de x, et exprime la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à la courbe $y = \mathrm{F}(x)$, au point x, y. Cette fonction nouvelle, limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable indépendante, prend le nom de *dérivée* et se désigne par l'une des notations y' ou $\mathrm{F}'(x) = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim. \frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)}{\Delta x}$.

8. Puisque le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite $\mathrm{F}''(x)$, il faut qu'il diffère de $\mathrm{F}'(x)$ d'une quantité ε qui s'évanouisse

avec Δx, on aura donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) + \varepsilon,$$

et par suite

$$\Delta y = F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta x F'(x) + \varepsilon \Delta x = y' \Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

Le premier terme de l'accroissement Δy ou le produit de la dérivée y' par l'accroissement Δx de la variable indépendante, s'appelle la *différentielle* de la fonction y et se désigne par la notation dy, de sorte que l'on a identiquement

$$dy = y' \Delta x = F'(x) \Delta x, \quad \text{ou même} \quad dy = y' dx = F'(x) dx,$$

parce qu'il suit des définitions données, que la différentielle dx de la variable indépendante est égale à son accroissement.

La différentielle sera d'ailleurs, en général, une quantité finie ou infiniment petite, suivant que l'accroissement $\Delta x = dx$ sera lui-même fini ou infiniment petit. Quand Δx est infiniment petit, ε doit l'être aussi, puisque le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ doit alors différer infiniment peu de sa limite y'; on peut donc, dans l'équation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$, négliger ε par rapport à la quantité finie y', ce qui donne $\Delta y = y' \Delta x = dy$, d'où l'on conclut que la différentielle, lorsqu'elle est infiniment petite, est sensiblement égale à l'accroissement de la fonction et réciproquement.

9. La recherche des dérivées et des différentielles des fonctions simples et composées, l'application des propriétés de ces différentielles et de ces dérivées à diverses questions d'analyse et de géométrie, forment l'objet du calcul différentiel.

DEUXIÈME LEÇON.

Calcul des dérivées et des différentielles des fonctions simples.

---

10. La dérivée et la différentielle d'une quantité constante sont nécessairement nulles.

On trouvera

1°. Pour $y=a+x\ldots\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\ldots$

$$\text{donc}\quad \lim.\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=1,\quad dy=y'dx=dx;$$

2°. Pour $y=a-x\ldots\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{\Delta x}=-1\ldots$

$$y'=-1,\quad dy=y'dx=-dx;$$

3°. Pour $y=ax\ldots\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a\ldots$

$$y'=a,\quad dy=y'dx=adx;$$

4°. Pour $y=\frac{a}{x}\ldots\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{a}{x+\Delta x}-\frac{a}{x}}{\Delta x}=-\frac{a}{(x+\Delta x)x}\ldots$

$$y'=-\frac{a}{x^2},dy=y'dx=-\frac{adx}{x^2};$$

5°. Pour $y=x^a\ldots\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^a-x^a}{\Delta x}$

$$=\frac{x^a}{\Delta x}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1\right];$$

posons

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha, \quad (1+\alpha)^a - 1 = \beta,$$

α et β seront deux quantités qui décroîtront indéfiniment avec Δx, et nous aurons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{a-1}\,\frac{\beta}{\alpha};$$

l'équation $(1+\alpha)^a - 1 = \beta$ donne

$$(1+\alpha)^a = 1+\beta, \quad \mathrm{l}(1+\beta) = a\,\mathrm{l}(1+\alpha);$$

or les deux expressions $\frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\alpha}$ et $\frac{\mathrm{l}(1+\beta)}{\beta}$ convergeant toutes deux vers la limite 1, nous pouvons poser

$$\frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\alpha} = 1+\gamma, \quad \frac{\mathrm{l}(1+\beta)}{\beta} = 1+\delta,$$

γ et δ étant encore des quantités qui convergent vers la limite o; ces deux équations jointes à celle qui précède, donneront

$$\frac{\beta}{\alpha} = a\,\frac{1+\delta}{1+\gamma}, \quad \lim.\frac{\beta}{\alpha} = a,$$

et par suite

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = a x^{a-1}, \quad dy = y'dx = a x^{a-1} dx;$$

de sorte que dans tous les cas, pour avoir la dérivée d'une puissance de x, il faut la multiplier par son exposant et diminuer ensuite cet exposant d'une unité;

6°. Pour $y = a^x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x}{\Delta x}(a^{\Delta x} - 1)$,

posons $a^{\Delta x} - 1 = \alpha$, d'où $\Delta x = \mathrm{L}(1+\alpha)$, nous

aurons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{\alpha}{L(1+\alpha)} = \frac{a^x}{\frac{L(1+\alpha)}{\alpha}},$$

et

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{a^x}{Le} = a^x \, la, \qquad dy = y'dx = a^x \, la dx;$$

si $a = e$, $y = e^x$, on aura $y' = e^x$, $dy = e^x dx$; la dérivée de e^x est cette même exponentielle;

7°. Pour $y = Lx$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{L(x+\Delta x) - Lx}{\Delta x} = \dfrac{L\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$,

posons

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha, \quad \text{d'où} \quad \Delta x = \alpha x,$$

il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{L(1+\alpha)}{\alpha}; \quad \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{Le}{x} = \frac{1}{x la},$$

$$dy = \frac{Le dx}{x} = \frac{dx}{x la},$$

si $a = e$, $y = lx$, on aura $y' = \dfrac{1}{x}$, $dy = \dfrac{dx}{x}$;

8°. Pour $y = \sin x$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$,

en posant

$$x + \Delta x = a + b, \quad x = a - b,$$

d'où

$$a = x + \frac{\Delta x}{2}, \quad b = \frac{\Delta x}{2},$$

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x = \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a$$
$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),\ \text{lim.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$dy=\cos x dx=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx;$$

9°. Pour $y=\cos x$, $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$,

et par une transformation semblable à celle qui précède,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\text{lim.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$dy=-\sin x dx=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx;$$

10°. Pour $\quad y=\arcsin x$,

$$x=\sin y,\quad \cos y=\sqrt{1-x^2},\quad \Delta x=\sin(y+\Delta y)-\sin y,$$

$$\Delta x=2\sin\frac{\Delta y}{2}\cos\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right),\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin\frac{\Delta y}{2}}\times\frac{1}{\cos\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)},$$

$$\text{lim.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

11°. Pour $y=\arccos x$, $\ x=\cos y$, $\ \sin y=\sqrt{1-x^2}$,

$$\Delta x=\cos(y+\Delta y)-\cos y=-2\sin\frac{\Delta y}{2}\sin\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\Delta y}{2}}{\sin\frac{\Delta y}{2}} \times \frac{1}{\sin\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)},$$

$$\text{lim.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Remarque. Si l'on ajoute les différentielles des deux fonctions arc sin x, arc cos x, on trouvera o, ce qui doit être, puisque la somme de ces deux arcs est évidemment égale à une quantité constante dont la différentielle est nécessairement nulle.

TROISIÈME LEÇON.

Dérivées et différentielles des fonctions de fonctions, des fonctions composées et des fonctions implicites.

---

11. Supposons que z soit une fonction de fonction de x, déterminée par les équations $z = F(y)$, $y = f(x)$; en donnant à x un accroissement Δx, y et z prendront des accroissements Δy, Δz, et l'on aura

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} \times \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

à la limite, le premier facteur $\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}$ devient évidemment la dérivée de z, prise par rapport à y, comme si y était variable indépendante; désignons cette dérivée par z'_y, nous désignerons par z'_x la dérivée de z prise par rapport à x, ou la limite du rapport $\frac{\Delta z}{\Delta x}$; le deuxième facteur $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite la dérivée y'_x ou y' de y prise par rapport à x; nous avons donc en dernier résultat $z'_x = z'_y y'_x$.

Ainsi la dérivée d'une fonction de fonction, est égale au produit de deux dérivées, l'une z'_y prise par rapport à y, comme si y était variable indépendante, et l'autre y'_x prise par rapport à x. En désignant par $d_x z$, $d_y z$, $d_x y$ les différentielles de z prises par rapport à x et à y et de y prise par rapport à x, on aura, n° 8, en vertu des défi-

nitions admises,

$$d_x z = z'_x dx,\quad d_y z = z'_y dy,\quad d_x y = y'_x dx = y' dx,$$

et par suite

$$\frac{d_x z}{dx} = \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_x y}{dx},\quad \frac{d_x z}{dx} dx = \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_z y}{dx} dx.$$

On est convenu de supprimer les indices x, y et d'écrire simplement

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},\quad \frac{dz}{dx} dx = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} dx,$$

en laissant aux dénominateurs dx, dy, désormais inséparables des numérateurs, à désigner que les dérivées sont prises tantôt par rapport à y, tantôt par rapport à x. Ainsi $\frac{dz}{dy}$ n'est pas proprement une fraction; mais un symbole, une notation qui indique la dérivée de z prise par rapport à y. On écrit cependant souvent $dz = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} dx$, au lieu de $\frac{dz}{dx} dx = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} dx$, parce que le second membre indique suffisamment par sa forme que la différentielle du 1er est prise par rapport à x.

Si l'on avait $u = \mathrm{F}(z)$, $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, on aurait de même

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\mathrm{F}(z + \Delta z) - \mathrm{F}(z)}{\Delta z} \cdot \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Les trois facteurs du 2e membre ont respectivement pour limites les dérivées u'_z, z'_y, y'_x de u par rapport à z, de z par rapport à y, de y par rapport à x; on aura donc $u'_x = u'_z . z'_y . y'_x$, et la dérivée d'une fonction de fonctions est toujours égale au produit des dérivées de toutes les variables prises chacune par rapport à celle qui la suit

ou dont elle dépend immédiatement, comme si elle était variable indépendante. En admettant les notations précédentes, on aura

$$\frac{d_x u}{dx} = \frac{d_z u}{dz} \cdot \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_x y}{dx},$$

que l'on écrit simplement

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}, \quad du = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx.$$

Applications. 1°. $z = y, \quad z' = y', \quad dz = dy.$

2°. $$z = a \pm y,$$

y étant une fonction de x, on aura

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{dy}{dx}, \quad dz = \pm dy,$$

une constante ajoutée à une fonction ne change rien à sa dérivée ou à sa différentielle, et par conséquent deux fonctions qui ne diffèrent que d'une quantité constante ont la même différentielle et la même dérivée.

3°. $$z = ay, \quad \frac{dz}{dx} = a\frac{dy}{dx}, \quad dz = a\frac{dy}{dx}dx = ady.$$

On différentie sans avoir égard à la constante qui reste simplement en facteur.

4°. $$z = \frac{a}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{y^2} \times \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{y^2}y',$$

$$dz = -\frac{a}{y^2}\frac{dy}{dx}dx = -\frac{ady}{y^2},$$

5°. $$z = y^a, \quad \frac{dz}{dx} = ay^{a-1}\frac{dy}{dx} = ay^{a-1}y',$$

$$dz = ay^{a-1}\frac{dy}{dx}dx = ay^{a-1}dy;$$

6°. $z = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$, $dz = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy$, $dz = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$.

La différentielle d'un radical du second degré est donc toujours égale à la différentielle de la quantité sous le radical divisée par le double du radical.

7°. $z = a^y$, $\frac{dz}{dx} = a^y \mathrm{l}a \frac{dy}{dx}$, $dz = a^y \mathrm{l}a dy$;

8°. $z = \mathrm{L}y$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y \mathrm{l}a} \frac{dy}{dx}$, $dz = \frac{1}{y \mathrm{l}a} \frac{dy}{dx} dx = \frac{1}{y \mathrm{l}a} dy$,

9.° $z = \sin y$, $\frac{dz}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$, $dz = \cos y \frac{dy}{dx} dx = \cos y \, dy$;

10°. $z = \cos y$, $\frac{dz}{dx} = -\sin y \frac{dy}{dx}$, $dz = -\sin y \frac{dy}{dx} dx = -\sin y \, dy$;

11°. $z = \operatorname{arc} \sin y$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{dy}{dx}$, $dz = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$,

12°. $z = \operatorname{arc} \cos y$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{dy}{dx}$, $dz = -\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$.

La règle générale est donc de différentier comme si y était variable indépendante, puis de substituer à $\frac{dy}{dx}$ ou à dy, leur valeur en x tirée de l'équation $y = f(x)$.

12. On calcule avec non moins de facilité les dérivées et les différentielles des fonctions composées.

1°. Pour $u = z \pm y$, on trouve

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} \pm \frac{\Delta y}{\Delta x}, \; u' = \frac{du}{dx} = y' \pm z' = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}, \quad du = dy \pm dz.$$

La dérivée ou la différentielle de la somme ou de la différence de deux fonctions est égale à la somme ou à la différence des dérivées ou des différentielles de ces fonctions.

2°. Pour $u = zy$,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{(z+\Delta z)(y+\Delta y) - zy}{\Delta x} = z\frac{\Delta y}{\Delta x} + y\frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta z,$$

$$\text{lim.}\ \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = \frac{du}{dx} = z\frac{dy}{dx} + y\frac{dz}{dx} = zy' + yz'.$$

Plus généralement si $w = vuzy\ldots$, on trouvera

$$w' = \frac{dw}{dx} = uzy\ldots v' + vzy\ldots u' + vuy\ldots z' + vuz\ldots y' + \text{etc.};$$

$$dw = uzy\ldots dv + vzy\ldots du + vuy\ldots dz + vuz\ldots dy + \text{etc.};$$

c'est-à-dire, que pour avoir la dérivée ou la différentielle d'un produit, il faut dans ce produit remplacer tour à tour chaque facteur par sa dérivée ou sa différentielle et faire la somme des produits ainsi obtenus.

On peut arriver d'une autre manière à cette conclusion. En effet, l'équation $w = vuzy\ldots$ donne

$$w^2 = v^2u^2z^2y^2\ldots,\quad \text{l}w^2 = \text{l}v^2 + \text{l}u^2 + \text{l}z^2 + \text{l}y^2 + \text{etc.};$$

en différentiant les deux membres de cette équation identique, on trouve

$$\frac{dw}{w} = \frac{dv}{v} + \frac{du}{u} + \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} + \text{etc.},$$

$$dw = uzy\ldots dv + vzy\ldots du + vuy\ldots dz + vuz\ldots dy + \text{etc.}$$

Nota. Nous avons élevé au carré pour éviter les logarithmes imaginaires, dans le cas où les quantités v, u, z, $y\ldots$ seraient négatives.

Exemples : $z = x\text{l}x,\quad z = x^a e^{-x}.$

3°. Pour $u = \frac{z}{y}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\frac{z+\Delta z}{y+\Delta y} - \frac{z}{y}\right)\frac{1}{\Delta x} = \frac{y\frac{\Delta z}{\Delta x} - z\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y(y+\Delta y)}$,

$$\text{lim.}\ \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = \frac{du}{dx} = \frac{yz' - zy'}{y^2},\quad du = \frac{ydz - zdy}{y^2}.$$

La différentielle d'une fraction est donc égale au dénominateur multiplié par la différentielle du numérateur, moins le numérateur multiplié par la différentielle du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur. On pourrait arriver au même théorème de la manière suivante :

L'équation $u = \frac{z}{y}$ donne

$$\mathrm{l}u^2 = \mathrm{l}z^2 - \mathrm{l}y^2, \quad \frac{du}{u} = \frac{dz}{z} - \frac{dy}{y}, \quad du = \frac{ydz - zdy}{y^2}.$$

4°. Pour $u = y^z$,

$$\mathrm{l}u = z\mathrm{l}y, \quad \frac{du}{u} = z\frac{dy}{y} + dz\,\mathrm{l}y, \quad du = y^{z-1}[zdy + y\mathrm{l}y\,dz].$$

13. On peut déduire de l'examen de ces divers cas particuliers la règle générale suivante : pour différentier une fonction composée quelconque, il suffit de différentier tour à tour par rapport à chacune des fonctions dont elle est formée, comme si les autres étaient constantes, et de faire la somme des quantités ainsi obtenues. En vertu de cette règle, les équations

$$v = uyz, \quad u = y^z, \quad u = x^x,$$

donnent bien

$$dv = yzdu + uydz + uzdy, \quad du = y^{z-1}(zdy + y\mathrm{l}y\,dz),$$
$$du = x^x(1 + \mathrm{l}x)\,dx.$$

Applicat. $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad dy = \frac{\cos x}{\cos x}dx + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx,$

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tang}^2 x)\,dx;$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad dy = -\frac{\sin x}{\sin x}dx - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x},$$

$$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)\,dx;$$

$$y = \text{arc tang}\, x, \quad x = \text{tang}\, y = \frac{\sin y}{\cos y}, \quad dx = \frac{dy}{\cos^2 y},$$

$$dy = dx \cos^2 y = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$y = \text{arc cot}\, x, \quad dy = -\, dx \sin^2 y = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Si l'on a plus généralement $u = F(y, z)$, y et z étant deux fonctions quelconques de x, d'après la règle ci-dessus énoncée, la différentielle du se composera de deux parties; l'une sera la différentielle de $F(y, z)$ prise par rapport à y comme si z était constant, différentielle que l'on peut et que l'on doit désigner par la notation $\frac{dF(y,z)}{dy}\frac{dy}{dx}dx$, ou simplement $\frac{du}{dy}dy$; l'autre sera la différentielle $\frac{du}{dz}dz$ de $F(y, z)$ prise par rapport à z comme si y était constant; on aura donc $du = \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$: or cette équation, qui est d'une très grande importance dans la recherche des différentielles, peut se démontrer facilement comme il suit. En effet, donnons à x un accroissement Δx, y, z, u prendront des accroissements Δy, Δz, Δu, et nous aurons

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y, z+\Delta z) - F(y, z)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y, z) - F(y, z)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$+ \frac{F(y+\Delta y, z+\Delta z) - F(y+\Delta y, z)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

En passant à la limite, le 1[er] membre devient $\frac{du}{dx}$; le 1[er] terme du 2[e] membre est $\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ ou le produit de $\frac{dy}{dx}$ par la dérivée de $F(y, z) = u$ prise par rapport à y, comme si y était seul variable, et z constant. Pour mieux connaître

ce que sera à la limite le second ~~facteur,~~ terme, faisons d'abord $\Delta y = 0$, il devient

$$\frac{F(y, z + \Delta z) - F(y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x};$$

et si l'on y fait de plus $\Delta z = 0$, on voit évidemment que ce terme à la limite est bien le produit de $\frac{dz}{dx}$ par la dérivée de $F(y, z)$ prise par rapport à z, comme si z était seul variable, et y constant. Nous avons donc réellement

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} \quad \text{et} \quad du = \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

Si l'on avait $w = F(y, z, u, v, \ldots)$, on trouverait de la même manière

$$dw = \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz + \frac{dw}{du}du + \frac{dw}{dv}dv + \text{etc.},$$

et la règle que nous avons donnée plus haut pour la différentiation des fonctions composées, se trouve rigoureusement démontrée; c'est-à-dire que pour obtenir la différentielle d'une fonction composée, il suffit de différentier tour à tour par rapport à chacune des fonctions composantes, et de faire la somme des différentielles ainsi obtenues. Ces différentielles $\frac{dw}{dy}dy$, $\frac{dw}{dz}dz$, $\frac{dw}{du}du$, $\frac{dw}{dv}dv$, s'appellent les *différentielles partielles* de la fonction $F(y, z, u, v, \ldots)$.

Exemple : si $u = F(\sin x, \cos x)$, en posant $\sin x = y$, $\cos x = z$, on aura

$$du = \frac{du}{dy}\cos x dx - \frac{du}{dz}\sin x dx;$$

et si

$$u = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

$$du = -2\cos x \sin x dx + 2\sin x \cos x dx = 0.$$

ce qui doit être puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

14. Il reste à déterminer les dérivées et les différentielles des fonctions implicites.

On a déjà vu que si deux fonctions de x, y et z sont identiquement égales, c'est-à-dire offrent toujours la même valeur, quel que soit x, l'équation $y = z$ entraîne les suivantes

$$y + \Delta y = z + \Delta z, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x}, \quad y' = z', \quad dy = dz;$$

les dérivées et les différentielles de ces fonctions seront donc aussi toujours égales. De plus, si une fonction de x est nulle identiquement, c'est-à-dire quel que soit x, sa dérivée et sa différentielle seront encore identiquement nulles. En effet, l'équation identique $y = F(x) = 0$, donne

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x) - F(x) = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = 0, \quad dy = 0.$$

Cela posé, considérons une fonction implicite quelconque donnée par l'équation $u = F(x, y) = 0$. Si dans cette équation l'on substituait à y la valeur $y = f(x)$ qu'on en retirerait en la résolvant, l'équation résultant de la substitution, $F[x, f(x)] = 0$, serait identiquement nulle ou serait vérifiée quelle que fût x, sa différentielle et sa dérivée seraient par conséquent nulles aussi. Si donc, en considérant y comme tenant la place de sa valeur en x, on différentie l'équation $F(x, y) = 0$, il faudra égaler cette différentielle à o; or l'équation $F(x, y) = 0$ n'est qu'un cas particulier de l'équation $u = F(y, z)$, celui où $u = 0$, $y = f(x)$, $z = x$; sa différentielle sera donc

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy, \text{ et nous aurons } \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}, \quad dy = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}\, dx.$$

Il est donc facile dans tous les cas, sans résoudre l'équation $F(x, y) = 0$, d'obtenir la dérivée $\frac{dy}{dx}$, ou la différentielle dy; il suffit pour cela de prendre les dérivées du 1er membre tour à tour, comme si x et y étaient variables indépendantes; le quotient de ces dérivées pris en signe contraire donnera la dérivée $\frac{dy}{dx}$; en le multipliant par dx on aura la différentielle dy.

1er *Exemple:*

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0; \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 - 3ay, \quad \frac{du}{dy} = 3y^2 - 3ax;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

2e *Exemple:*

$$y^x - x^y = 0, \quad \frac{du}{dx} = y^x \,\mathrm{l}y - yx^{y-1}, \quad \frac{du}{dy} = xy^{x-1} - x^y \,\mathrm{l}x;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \,\mathrm{l}y}{xy^{x-1} - x^y \,\mathrm{l}x} = \frac{y^2 - xy \,\mathrm{l}y}{x^2 - xy \,\mathrm{l}x}.$$

Nota. Dans les équations qui précèdent, aux notations $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$..., on substitue souvent les notations équivalentes $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$....

QUATRIÈME LEÇON.

Des dérivées et différentielles successives. — Changement de la variable indépendante. — Différentielles des fonctions imaginaires.

15. La dérivée $F'(x)$ d'une fonction quelconque $F(x)$ étant généralement une nouvelle fonction de x, elle aura aussi sa dérivée et sa différentielle, et l'on conçoit que d'une fonction donnée $F(x)$ on pourra déduire en général une suite de fonctions nouvelles, dont chacune sera la dérivée de la précédente. Ces fonctions nouvelles sont ce qu'on nomme les dérivées des divers ordres de y ou $F(x)$, et on les indique à l'aide des notations

$$y',\ y'',\ y''' \ldots\ldots\ldots\ldots\ y^{(n-1)},\ \ y^{(n)},$$

ou

$$F'(x),\ F''(x),\ F'''(x) \ldots\ F^{(n-1)}(x),\ F^{(n)}(x).$$

Ainsi y' ou $F'(x)$ sera la dérivée du premier ordre de la fonction proposée $y = F(x)$; y'' ou $F''(x)$ sera la dérivée du second ordre de y et en même temps la dérivée du premier ordre de y'... Enfin $y^{(n)}$ ou $F^{(n)}(x)$ (n désignant un nombre entier quelconque) sera la dérivée de l'ordre n de y et en même temps la dérivée du premier ordre de $y^{(n-1)}$, etc.

16. Comme la différentielle $dy = y'dx$, d'une fonction de la variable x est une autre fonction de cette variable, on pourra la différencier plusieurs fois de suite, et l'on obtiendra de cette manière les différentielles des divers ordres de la fonction y. Il semble qu'il faudrait les désigner par les notations $d.dy$, $d.d.dy \ldots\ d.d.d.d.dy$;

mais on est convenu, pour abréger, de les écrire de la manière suivante

$$dy,\ d^2y,\ d^3y,\ d^4y,\ldots\ d^ny.$$

Il existe entre les dérivées et les différentielles successives des relations remarquables qui peuvent cependant être regardées comme le résultat de certaines conventions.

Pour calculer d^2y, il faut différentier l'expression $dy = y'dx$; or dans cette expression on regarde le facteur dx, qui est l'accroissement arbitraire Δx attribué à la variable x dans la première différentiation, comme indépendant de cette variable, et il l'est en effet, comme ne variant pas avec elle : $y'dx = \mathrm{F}'(x)dx$ est donc un produit dans lequel le facteur dx est constant, et dont on obtiendra la dérivée en donnant à x un nouvel accroissement Δx, et prenant la limite de la quantité

$$dx\frac{\mathrm{F}'(x+\Delta x)-\mathrm{F}'(x)}{\Delta x},$$

limite qui est évidemment égale à $y''dx$: telle est donc la dérivée de dy, et si l'on convient de prendre le second accroissement Δx égal au premier dx, la différentielle de dy sera $y''dx^2$, et l'on aura

$$d^2y = y''dx^2.$$

En procédant de la même manière, on aura successivement

$$d^3y = d.y''dx^2 = dx^2dy'' = y'''dx^3,\ d^4y = y''''dx^4 \ldots d^ny = y^{(n)}dx^n.$$

La différentielle de l'ordre quelconque n est donc égale à la dérivée de l'ordre n multipliée par la puissance $n^{ième}$, dx^n, de l'accroissement arbitraire attribué à la variable x, et réciproquement la dérivée de l'ordre n, $y^{(n)}$, est le coefficient par lequel il faut multiplier la $n^{ième}$ puissance

dx^n de $dx = \Delta x$, pour obtenir la différentielle de l'ordre n. C'est pour cette raison que $y^{(n)}$ est quelquefois appelé le coefficient différentiel de l'ordre n.

Appliquons ces principes généraux d'abord aux fonctions simples :

$$1^o.\quad y = a + x,\ y' = 1,\ y'' = 0,\ y''' = 0 \ldots y^{(n)} = 0,$$
$$dy = dx,\ d^2y = 0,\ d^3y = 0 \ldots d^ny = 0;$$

$$2^o.\quad y = a - x,\ y' = -1,\ y'' = 0,\ y''' = 0 \ldots y^{(n)} = 0,$$
$$dy = -dx,\ d^2y = 0,\ d^3y = 0 \ldots d^ny = 0;$$

$$3^o.\quad y = ax,\ y' = a,\ y'' = 0, \ldots y^{(n)} = 0,$$
$$dy = adx,\ d^2y = 0 \ldots d^ny = 0;$$

$$4^o.\quad y = \frac{a}{x} = ax^{-1},\ y' = -ax^{-2},\ y'' = +2ax^{-3} \ldots$$
$$y^{(n)} = (-1)^n 1.2.3 \ldots nax^{-(n+1)},$$
$$d^ny = (-1)^n 1.2.3 \ldots nax^{-(n+1)}dx^n.$$

Le coefficient $(-1)^n$ exprime que la dérivée est accompagnée du signe $-$ quand n est impair, et du signe $+$ quand n est pair.

$$5^o.\quad y = x^a,\ y' = ax^{a-1},\ y'' = a(a-1)x^{a-2} \ldots$$
$$y^{(n)} = a(a-1)(a-2) \ldots (a-n+1)x^{a-n};$$
$$d^ny = a(a-1) \ldots (a-n+1)x^{a-n}dx^n.$$

Cette dérivée de l'ordre n ne sera jamais nulle si a est un nombre fractionnaire ou une quantité négative, mais elle s'évanouira si a est un nombre entier m, quand n sera égal à $m+1$. Ainsi la dérivée et la différentielle de l'ordre $(m+1)$ de x^m sont nulles ; la dérivée de l'ordre m est la quantité constante $m(m-1)(m-2) \ldots 1$, ou $1.2.3 \ldots m$.

$$6^o.\quad y = a^x,\ y' = a^x la,\ y'' = a^x la^2 \ldots,\ y^{(n)} = a^x la^n;$$
$$d^{(n)}y = a^x la^n dx^n.$$

Si

$$a = e,\ y = e^x \ldots,\ y^{(n)} = e^x \ldots,\ d^{(n)}y = e^x dx^n,$$

toutes les dérivées de e^x sont cette même exponentielle. Les dérivées successives de $y=e^{-x}$, sont

$$y'=-e^{-x},\ y''=+e^{-x}\dots\quad y^{(n)}=(-1)^n e^{-x},$$

et l'on a

$$d^n y=(-1)^n e^{-x}dx^n.$$

7°. $y=\mathrm{L}(x)$, $y'=\dfrac{1}{x\mathrm{l}a}=\dfrac{1}{\mathrm{l}a}.x^{-1}$, $y''=-\dfrac{1}{\mathrm{l}a}.x^{-2}\dots$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{l}a}.1.2.3\dots(n-1)x^{-n},$$

$$d^{(n)}y=\frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{l}a}.1.2.3\dots(n-1)x^{-n}dx^n$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\dots(n-1).\mathrm{L}e}{x^n}dx^n.$$

8°. $y=\sin x$, $y'=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y''=\sin\left(x+2\dfrac{\pi}{2}\right)\dots$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad d^{(n)}y=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)dx^n.$$

$\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ n'a que quatre valeurs différentes; n en effet ne peut avoir qu'une des formes suivantes :

$$4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3.$$

Dans le premier cas

$$\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+2m\pi)=\sin x;$$

dans le deuxième cas

$$\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x;$$

dans le troisième cas

$$\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+2m\pi+\pi)=-\sin x;$$

dans le quatrième cas

$$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2m\pi + 3\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

Les dérivées de $\sin x$ n'offrent donc que quatre valeurs qui se reproduisent périodiquement.

9°. $y = \cos x, y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ y'' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)\ldots$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\quad d^{(n)}y = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n.$$

Ici encore les dérivées n'ont que quatre valeurs distinctes, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $+\sin x$, qui se reproduisent périodiquement.

10°. $y = \arcsin x,\ y' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},\ y'' = x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}},$

$$y''' = (1 + 2x^2)(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}},\ \text{etc.};$$

11°. $y = \arccos x,\ y' = -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},\ y'' = -x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$, etc.

17. Quand z était une fonction de fonction, déterminée par les équations

$$z = F(y),\ y = f(x),$$

nous avons trouvé

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx};$$

en différentiant une seconde fois, et remarquant que $\frac{dz}{dy}$ est une fonction de y, $\frac{dy}{dx}$ une fonction de x, nous aurons

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2},\quad d^2z = \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 + \frac{dz}{dy}d^2y.$$

Une troisième différentiation donnerait

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3z}{dy^3}\frac{dy^3}{dx^3} + 3\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^3y}{dx^3},$$

$$d^3z = \frac{d^3z}{dy^3}dy^3 + 3\frac{d^2z}{dy^2}dy d^2y + \frac{dz}{dy}d^3y.$$

Exemple: $z = \mathrm{l}y,\quad y = \sin x.$

On trouve

$$dy = \cos x dx,\qquad d^2y = -\sin x dx^2,\qquad d^3y = -\cos x dx^3,$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin x},\quad \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{\sin^2 x},\quad \frac{d^3z}{dy^3} = \frac{2}{y^3} = \frac{2}{\sin^3 x},$$

$$dz = d.\mathrm{l}\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}dx,\quad d^2z = d^2.\mathrm{l}\sin x = -\frac{dx^2}{\sin^2 x},$$

$$d^3z = d^3.\mathrm{l}\sin x = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}dx^3.$$

Ces exemples suffisent pour montrer la marche à suivre dans tous les cas particuliers.

18. Supposons enfin que u soit une fonction composée, ou que l'on ait

$$u = \mathrm{F}(y, z),\quad y = \varphi(x),\quad z = \chi(x).$$

Nous avons trouvé

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}.$$

Différentions une seconde fois, en nous rappelant que $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ sont des fonctions immédiates de y et de z, et des fonctions de fonctions de x, tandis que $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ sont seulement fonctions de x; de plus, désignons par les notations $\frac{d^2u}{dz\,dy}$, $\frac{d^2u}{dy\,dz}$ les dérivées de $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ prises, la première par rapport à z, la deuxième par rapport à y, ou ce

qu'on obtient en différentiant u d'abord par rapport à y, puis par rapport à z, ou en premier lieu par rapport à z, et en second lieu par rapport à y; nous montrerons plus tard que ces deux quantités sont égales, ou qu'on a $\frac{d^2u}{dzdy} = \frac{d^2u}{dydz}$: cela posé, nous trouverons

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{du}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dzdy}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2},$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dy}d^2y + 2\frac{d^2u}{dzdy}dzdy + \frac{du}{dz}d^2z + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2.$$

Pour différentier une troisième fois, on désignerait par $\frac{d^3u}{dzdy^2}$, $\frac{d^3u}{dydz^2}$ les dérivées des quantités $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dzdy}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, prises pour la première par rapport à z, pour la seconde par rapport à z et à y, pour la troisième par rapport à y. Nous prouverons aussi plus tard que ces dérivées offrent seulement deux valeurs distinctes $\frac{d^3u}{dzdy^2} = \frac{d^3u}{dy^2dz} = \frac{d^3u}{dydzdy}$, $\frac{d^3u}{dydz^2} = \frac{d^3u}{dz^2dy} = \frac{d^3u}{dzdydz}$: dès lors il serait facile d'écrire la valeur de $\frac{d^3u}{dx^3}$ ou de d^3u.

Exemples : $u = yz$, $y = \sin x$, $z = \cos x$,

$$dy = \cos x dx, \quad d^2y = -\sin x dx^2,$$
$$dz = -\sin x dx, \quad d^2z = -\cos x dx^2,$$

$$\frac{du}{dy} = z, \quad \frac{du}{dz} = y, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dzdy} = \frac{d^2u}{dydz} = 1,$$

$du = z\cos x dx - y \sin x dx = \cos^2 x dx - \sin^2 x dx$, $= \mathrm{Cos}\,2x.dx = \mathrm{Sin}(2x+\frac{\pi}{2})dx$

$d^2u = -\cos x \sin x dx^2 - 2\cos x \sin x dx^2 - \cos x \sin x dx^2,$

ou enfin

$$d^2u = -4\sin x \cos x dx^2. = -2\,\mathrm{Sin}\,2x\,dx^2 = 2\,\mathrm{Sin}(2x+2\tfrac{\pi}{2})dx^2$$

On trouvera facilement, d'après ce qui précède, que les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des fonctions

$d^3u = 2^2\,\mathrm{Sin}(2x+3\frac{\pi}{2})dx^3 = -2^2\,\mathrm{Cos}\,2x\,dx^3$

$d^4u = 2^3\,\mathrm{Sin}(2x+4\frac{\pi}{2})dx^4 = 2^3\,\mathrm{Sin}\,2x.dx^4$

$d^nu = 2^{n-1}\,\mathrm{Sin}(2x+n\frac{\pi}{2})dx^n$

$$u = y + z,\quad u = y - z,\quad u = ay + bz + \text{etc.},$$
$$u = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots + px^2 + qx + r,$$

sont

$$d^n(y+z) = d^ny + d^nz,\quad d^{(n)}(y-z) = d^ny - d^nz,$$
$$d^n(ay + bz + \text{etc.}\ldots) = ad^ny + bd^nz + \text{etc.},$$
$$d^n(ax^n + bx^{n-1} + \ldots) = 1.2.3\ldots nadx^n,$$
$$d^{n+1}(ax^n + bx^{n-1} + \text{etc.}) = 0.$$

La différentielle $n^{ième}$ d'une somme ou d'une différence, est donc encore égale à la somme ou à la différence des différentielles $n^{ièmes}$.

19. *Scolie.* Reprenons les équations

$$y = f(x),\quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx};$$

quand x est variable indépendante on obtient immédiatement les dérivées et les différentielles successives en regardant dx comme une quantité constante, mais si x cesse d'être la variable indépendante et devient fonction d'une autre variable, dx sera aussi une fonction de cette variable, et en différentiant plusieurs fois de suite les deux équations

$$y = f(x),\quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}\ldots,$$

et ayant égard aux règles ci-dessus établies, on trouve

$$dy = f'(x)dx,\quad d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x,$$
$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad y'' = d.\frac{\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3},$$

$$y''' = d.\frac{\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}}{dx}$$
$$= \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^5}\ldots

Ainsi, 1° pour passer du cas où la variable x est variable indépendante au cas où elle cesserait de l'être, il suffit de substituer aux valeurs $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., des dérivées y', y'', y''',... les nouvelles valeurs données par les équations qui précèdent; 2° pour revenir au cas où x serait variable indépendante, il suffit de supposer la différentielle dx constante, et par suite $d^2x=0$, $d^3x=0$, etc.; on retrouvera en effet de cette manière

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'''=\frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc.};$$

3° dans ces substitutions ou dans ces changements de variable indépendante, la dérivée du premier ordre est la seule dont l'expression $\frac{dy}{dx}$ reste la même, de sorte que les formules qui ne contiendraient que des dérivées du premier ordre, conserveront seules la même forme dans tous les cas.

20. Pour obtenir les dérivées ou les différentielles successives d'une fonction implicite donnée par l'équation $u=F(x,y)=0$, on pourra partir de l'équation

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}} \quad \text{ou} \quad dy=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}dx,$$

qui, différentiée plusieurs fois, donnera immédiatement les dérivées et les différentielles cherchées; mais il y a souvent de l'avantage à déduire ces différentielles des équations que l'on obtient en différentiant de nouveau l'équation

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0.$$

Dans cette équation comme dans toutes celles qu'on en déduit, les dérivées partielles $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., seront,

en général, des fonctions de x et de y : la fonction implicite y, au contraire, et ses différentielles dy, d^2y, d^3y, etc., doivent être supposées tenir la place de leurs valeurs en x ; dans cette hypothèse les premiers membres des équations sont identiquement nuls, et il faudra toujours égaler leurs différentielles à o. On trouvera de cette manière

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{du}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}+3\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\frac{dy}{dx}+\ldots+\frac{du}{dy}\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

On a quelquefois aussi besoin de prendre les dérivées et les différentielles des fonctions imaginaires que nous supposerons toujours ramenées à la forme $u+v\sqrt{-1}$, u et v désignant des fonctions réelles. Cela posé, si l'on appelle limite d'une expression imaginaire variable ce que devient cette expression quand on y remplace la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ par leurs limites respectives, et si, de plus, on étend aux fonctions imaginaires les définitions données pour les différentielles et les dérivées des fonctions réelles, on reconnaîtra que l'équation $w=u+v\sqrt{-1}$ entraîne les suivantes :

$$\Delta w=\Delta u+\Delta v\sqrt{-1},\quad \frac{\Delta w}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1},$$

$$w'=\frac{dw}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\sqrt{-1}=u'+v'\sqrt{-1},$$

$$dw=du+dv\sqrt{-1};$$

de sorte que pour différentier une fonction imaginaire, il faut opérer comme si la fonction était réelle, en regardant $\sqrt{-1}$ comme un coefficient constant. Cette règle s'étend évidemment aux dérivées et aux différentielles successives.

Exemples : $\quad w=\cos x+\sqrt{-1}\sin x,$

$$dw=(-\sin x+\sqrt{-1}\cos x)\,dx,\ dw=w\sqrt{-1}\,dx.$$

CINQUIÈME LEÇON.

Relations qui existent entre les fonctions réelles d'une seule variable et leurs dérivées ou différentielles de divers ordres.

---

21. Soient Δx, Δy, les accroissements simultanés des variables x et $y = F(x)$, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ayant pour limite la dérivée y', finira, quand Δx sera assez petit, par avoir le signe de sa limite, et sera par conséquent positif si la dérivée est positive, négatif si la dérivée est négative. Dans le premier cas, les différences infiniment petites Δy, Δx, étant de même signe, la fonction y croîtra ou diminuera en même temps que la variable x; dans le second cas, ces différences infiniment petites étant de signes contraires, la fonction y croîtra si la variable x diminue et décroîtra si la variable x augmente.

Corollaire 1[er]. Concevons que la fonction $y = F(x)$ demeure continue entre deux limites données x_0, X, et que l'on fasse croître la variable x par degrés insensibles depuis la première limite jusqu'à la seconde, la fonction $F(x)$ ne pourra cesser de croître pour diminuer, ou de diminuer pour croître, qu'autant que la dérivée $F'(x)$ passera du positif au négatif, ou du négatif au positif. Il est essentiel d'observer que dans ce passage la fonction dérivée deviendra nulle, si elle ne cesse pas d'être continue, et infinie si, sans cesser d'être toujours réelle, elle est discontinue.

Corollaire 2[e]. Supposons que la fonction $y = F(x)$ s'évanouisse pour la valeur particulière x_0, et demeure

continue dans le voisinage de cette valeur, on aura

$$F(x_0 + \Delta x) = \Delta x F'(x_0) + \varepsilon_0 :$$

en supposant donc que la valeur $x_0 + \Delta x = x$ diffère très peu de x_0,

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x) \text{ sera positif si } F'(x_0) > 0,$$
$$F(x_0 + \Delta x) = F(x) \text{ sera négatif si } F'(x_0) < 0.$$

22. Soient $F(x)$ et $f(x)$ deux fonctions réelles de x qui restent continues ainsi que leurs dérivées entre les limites x et $x + h$; supposons d'ailleurs que la fonction dérivée de la seconde $f'(x)$ ne change pas de signe entre les limites dont il s'agit, ou qu'entre ces limites la fonction $f(x)$ aille toujours en croissant ou toujours en décroissant, le rapport des deux différences

$$F(x+h) - F(x), \quad f(x+h) - f(x),$$

sera égal à l'une des valeurs que prend entre les limites x et $x+h$ le rapport des dérivées $F'(x)$, $f'(x)$, c'est-à-dire qu'en désignant par θ_1 un nombre plus petit que l'unité, on aura

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{F'(x + \theta_1 h)}{f'(x + \theta_1 h)}.$$

Démonstration. Soit A la plus petite et B la plus grande des valeurs que prend le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ entre les limites x et $x + h$; les deux différences

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} - A, \quad \frac{F'(x)}{f'(x)} - B,$$

seront de signes contraires; il en sera de même de ces deux autres

$$F'(x) - A f'(x), \quad F'(x) - B f'(x),$$

puisque $f'(x)$ est constamment de même signe : or ces deux dernières différences sont les dérivées des deux fonctions

$$F(x) - A f(x), \quad F(x) - B f(x);$$

l'une de ces fonctions sera donc croissante et l'autre décroissante, et par conséquent, si de ce que devient chacune de ces deux fonctions on retranche ce qu'elle était, les différences ainsi obtenues

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)-\mathrm{A}[f(x+h)-f(x)],\\&\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)-\mathrm{B}[f(x+h)-f(x)],\end{aligned}$$

seront l'une positive et l'autre négative; et parce que $f(x+h)-f(x)$ est par hypothèse une quantité toujours positive ou toujours négative, les deux différences

$$\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{f(x+h)-f(x)}-\mathrm{A},\quad \frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{f(x+h)-f(x)}-\mathrm{B},$$

seront encore nécessairement de signes contraires, et par conséquent le rapport $\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{f(x+h)-f(x)}$, plus grand que A, plus petit que B, sera compris entre la plus grande et la plus petite des valeurs du rapport $\frac{\mathrm{F}'(x)}{f'(x)}$. De plus, si, comme nous l'avons supposé, les fonctions dérivées sont elles-mêmes continues, pendant que x passera de la valeur x à la valeur $x+h$, le rapport $\frac{\mathrm{F}'(x)}{f'(x)}$ passera par toutes les valeurs intermédiaires entre A et B; or $\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{f(x+h)-f(x)}$ est une de ces valeurs intermédiaires; il existe donc une valeur de x de la forme $x+\theta_1 h$ propre à vérifier l'équation

$$\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{f(x+h)-f(x)}=\frac{\mathrm{F}'(x+\theta_1 h)}{f'(x+\theta_1 h)},\quad \text{ce qu'il fallait démontrer.}$$

Corollaire 1[er]. En posant, dans l'équation qui précède, $x=x_0$, on a

$$\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{\mathrm{F}'(x_0+\theta_1 h)}{f'(x_0+\theta_1 h)},$$

et si les deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$ s'évanouissent pour $x = x_0$,

$$\frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F'(x_0 + \theta_1 h)}{f'(x_0 + \theta_1 h)}.$$

Corollaire 2. Supposons que les fonctions ne s'évanouissent plus pour $x = x_0$, mais que leurs dérivées, celles de la seconde restant toujours positives ou toujours négatives entre les limites x_0 et $x_0 + h$, s'évanouissent seules, jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement, quand on donne à x cette valeur. En appliquant successivement à ces dérivées la deuxième équation du corollaire 1er, équation qui s'étend à toutes les fonctions qui satisfont aux conditions énoncées, on aura

$$\frac{F'(x_0 + \theta_1 h)}{f'(x_0 + \theta_1 h)} = \frac{F''(x_0 + \theta_2 h)}{f''(x_0 + \theta_2 h)} = \ldots$$
$$= \frac{F^{(n-1)}(x_0 + \theta_{n-1} h)}{f^{(n-1)}(x_0 + \theta_{n-1} h)} = \frac{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}{f^{(n)}(x_0 + \theta h)},$$

et par suite, en vertu du corollaire 1er,

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}.$$

Si les fonctions s'évanouissaient en même temps que leurs dérivées, on aurait

$$\frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}{f^{(n)}(x_0 + \theta h)},$$

et en posant $x_0 = 0$, $h = x$,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^{(n)}(\theta x)}{f^{(n)}(\theta x)}.$$

Corollaire 3. Les conditions des théorèmes précédents seront toutes vérifiées si l'on prend h assez petit, pourvu que les fonctions et leurs dérivées s'évanouissent, quand il le faudra, pour $x = x_0$; en effet, les dérivées de la

seconde fonction ne changeront pas de signe dans l'intervalle infiniment petit de x_0 à $x_0 + h$.

Les conditions relatives à $f(x)$ seront aussi remplies si l'on prend $f(x) = (x - x_0)^n$, d'où

$$f'(x) = n(x - x_0)^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)(x - x_0)^{n-2}, \ldots$$
$$f^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2(x - x_0),$$
$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n = f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Si donc les dérivées de $F(x)$ jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement s'évanouissent pour $x = x_0$, on aura

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

et en faisant $n = 1$,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = hF'(x_0 + \theta h).$$

Si $F(x_0)$ s'évanouissait aussi, on aurait

$$F(x_0 + h) = \frac{h^n}{1.2.3..n} F^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Lorsqu'on fait $x_0 = 0$, $h = x$, les équations qui précèdent deviennent

$$F(x) - F(0) = \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(\theta x), \quad F(x) - F(0) = xF'(\theta x),$$

$$F(x) = \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(\theta x).$$

23. L'équation déjà obtenue $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^{(n)}(\theta x)}{f^{(n)}(\theta x)}$ renferme un théorème dont voici l'énoncé : si deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$ continues, ainsi que leurs dérivées, s'évanouissent pour $x = 0$ avec ces dérivées jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement ; si de plus les n premières dérivées de la seconde sont toujours positives, ou toujours négatives entre les limites 0 et x, la valeur du rapport des fonctions sera une valeur intermédiaire du rapport des dérivées $n^{\text{ièmes}}$. On peut donner de ce théorème important une démonstration directe et très simple.

Supposons d'abord que les deux fonctions s'évanouissant seules pour $x = 0$, la dérivée première $f'(x)$ de la seconde conserve constamment le même signe, ce qui exige que la fonction $f(x)$ soit toujours croissante ou toujours décroissante, et par suite toujours positive ou toujours négative, puisqu'elle s'évanouit avec x. Dans cette hypothèse, désignons par A la plus petite, et par B la plus grande des valeurs que prend le rapport des dérivées $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ entre les limites o et x, les deux quantités $\frac{F'(x)}{f'(x)} - A$, $\frac{F'(x)}{f'(x)} - B$, seront de signes contraires, et il en sera de même, puisque $f'(x)$ ne change pas de signe, des différences $F'(x) - Af'(x)$, $F'(x) - Bf'(x)$, de sorte que des deux fonctions $F(x) - Af(x)$, $F(x) - Bf(x)$ dont ces différences sont les dérivées, l'une sera toujours croissante, l'autre toujours décroissante, ou, ce qui revient au même, puisque ces fonctions s'évanouissent aussi toutes deux avec x, l'une sera positive et l'autre négative; les quotients

$$\frac{F(x) - Af(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{f(x)} - A, \quad \frac{F(x) - Bf(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{f(x)} - B,$$

seront encore de signes contraires, parce que $f(x)$ ne change pas de signe, et il restera démontré que la valeur du rapport des fonctions est comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs du rapport des dérivées. De plus, si l'on fait passer la variable de la valeur o à la valeur x, le rapport continu $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ passera par toutes les valeurs intermédiaires entre A et B; or, comme on l'a prouvé, $\frac{F(x)}{f(x)}$ est une de ces valeurs, il existe donc une valeur de x de la forme $\theta_1 x$, θ_1 désignant un nombre compris entre o et 1, propre à vérifier l'équation

$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F'(\theta_1 x)}{f'(\theta_1 x)}$. Si les deux dérivées premières, secondes, troisièmes, quatrièmes, etc., jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, s'évanouissent à leur tour avec x, en appliquant aux dérivées ce que l'on a dit des fonctions, on trouvera

$$\frac{F'(\theta_1 x)}{f'(\theta_1 x)} = \frac{F''(\theta_2 x)}{f''(\theta_2 x)} = \frac{F'''(\theta_3 x)}{f'''(\theta_3 x)} = \ldots = \frac{F^{(n)}(\theta x)}{f^{(n)}(\theta x)},$$

et par conséquent $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^{(n)}(\theta x)}{f^{(n)}(\theta x)}$.

En changeant dans l'équation qui précède x en h, $F(h)$ et $f(h)$ en $F(x_0+h)-F(x_0)$, $f(x_0+h)-f(x_0)$, et supposant que les dérivées des fonctions $F(x)$, $f(x)$ s'évanouissent pour $x = x_0$, jusqu'à l'ordre n inclusivement, on retrouverait l'équation

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)},$$

et si $F(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$,

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)}.$$

Les deux théorèmes fondamentaux des nos qui précèdent peuvent donc être déduits l'un de l'autre ou démontrés séparément.

Nota. Les équations

$$F(x_0+h) - F(x_0) = hF'(x_0+\theta h),$$
$$F(x+h)-F(x) = hF'(x+\theta h), \quad F(x)-F(0) = xF'(\theta x),$$

supposent seulement que la fonction $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$, sont respectivement continues entre les limites x_0 et x_0+h, x et $x+h$, 0 et x, ce qui arrivera toujours quand h ou x seront des quantités infiniment petites.

SIXIÈME LEÇON.

Applications des premiers principes du Calcul différentiel à diverses questions d'analyse où il n'entre qu'une seule variable indépendante.

Première application. *Détermination des véritables valeurs des quantités qui se présentent sous l'une des formes indéterminées*

$$\frac{0}{0},\ \pm\frac{\infty}{\infty},\ 0\times\pm\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ \pm 1^{\infty}.$$

24. Supposons que deux fonctions réelles de x, $F(x)$, $f(x)$, s'évanouissent pour $x=x_0$, et qu'il en soit de même de leurs dérivées jusqu'à celle de l'ordre n exclusivement, de sorte que les deux dérivées de l'ordre n soient les premières qui ne s'évanouissent plus à la fois pour $x=x_0$; en désignant par h une quantité infiniment petite, nous aurons, n° 23, corollaires 2 et 3, $\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)}$, et par suite, en faisant $h=0$, $\frac{F(x_0)}{f(x_0)}=\frac{F^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)}$; de sorte que la vraie valeur du rapport $\frac{F(x_0)}{f(x_0)}$ qui se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, est le rapport des valeurs que prennent pour $x=x_0$, les deux dérivées de ces fonctions qui, les premières, cessent de s'évanouir à la fois. Si l'une de ces deux dérivées s'évanouit, la vraie valeur du rapport sera 0 ou ∞, elle sera au contraire une quantité

finie si aucune des dérivées $n^{ièmes}$ ne s'évanouit. Si $n=1$, c'est-à-dire si les dérivées premières ne s'évanouissent pas à la fois, on aura

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)}=\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Exemples : pour $x=0$,

$$\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2,\quad \frac{\sin^2 x}{x}=\frac{2\sin x\cos x}{1}=0,$$

$$\frac{\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{2x}=\infty,\quad \frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\sin x}{2x}=\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{\sin x}{6x}=\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2\ldots \text{ etc.};$$

et pour $x=1$,

$$\frac{lx}{x-1}=\frac{1}{x}=1;\quad \frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2};\quad \frac{x-1}{x^n-1}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}, \text{ etc.}$$

25. Supposons maintenant que les deux fonctions $F(x)$, $f(x)$ deviennent infinies pour $x=x_0$, les deux quantités $\frac{1}{F(x)}$, $\frac{1}{f(x)}$ s'évanouiront et l'on aura, d'après ce qui précède, pour $x=x_0$,

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)}=\frac{\frac{1}{f(x_0)}}{\frac{1}{F(x_0)}}=\frac{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}}{\frac{F'(x_0)}{F(x_0)^2}}=\frac{F(x_0)^2}{f(x_0)^2}\cdot\frac{f'(x_0)}{F'(x_0)},$$

d'où $\frac{F(x_0)}{f(x_0)}=\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$, de sorte que la véritable valeur du rapport $\frac{F(x_0)}{f(x_0)}$, qui se présente sous la forme indétermi-

née $\frac{\infty}{\infty}$, coïncide avec la valeur correspondante du rapport $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$.

Exemple. On a pour $x = 0$,

$$\frac{1\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x} = \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.$$

Ce théorème est vrai quel que soit x_0, ainsi que le précédent, et il le sera par conséquent pour $x_0 = \infty$.

Exemples. On a pour $x = \infty$,

1°. $$\frac{a^x}{x} = \frac{a^x \, 1a}{1} = \infty.$$

L'exponentielle l'emporte sur la variable x, ou croît beaucoup plus rapidement.

2°. $$\frac{Lx}{x} = \frac{1}{x1a} = 0.$$

Le logarithme croît moins rapidement que le nombre.

Corollaire. Si les dérivées $F'(x)$ et $f'(x)$ devenaient elles-mêmes infinies pour $x = x_0$, et s'il en était ainsi jusqu'aux dérivées de l'ordre n exclusivement, on aurait

$$\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{F''(x_0)}{f''(x_0)} = \ldots \frac{F^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)},$$

et par suite

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)} = \frac{F^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)}.$$

La vraie valeur d'un rapport qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ coïncide donc avec la valeur du rapport des dérivées qui, les premières, ne deviennent pas infinies à la fois pour $x = x_0$.

Exemple. On a pour $x=\infty$, et en désignant par n le nombre entier immédiatement supérieur à a,

$$\frac{x^a}{e^x}=\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{x^{n-a}e^x}=0;$$

c'est toujours l'exponentielle qui l'emporte.

3°. Si le produit $s=\mathrm{F}(x).f(x)$ prend la forme $0\times\infty$, sa véritable valeur coïncidera avec celle du rapport $\frac{\mathrm{F}(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ou $\frac{f(x)}{\frac{1}{\mathrm{F}(x)}}$, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, et que l'on déterminera facilement à l'aide des méthodes précédentes.

Exemples. On a pour $x=\infty$,

$$e^{-x}\,\mathrm{l}x=\frac{\mathrm{l}x}{e^x}=\frac{1}{x\,e^x}=0,$$

et pour $x=0$,

$$x\mathrm{l}x=\frac{\mathrm{l}x}{x^{-1}}=\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=-x=0,$$

$$x^a.\mathrm{l}x=\frac{\mathrm{l}x}{x^{-a}}=\frac{x^{-1}}{-ax^{-a-1}}=-\frac{x^a}{a}=0.$$

4°. Enfin si l'exponentielle $s=\mathrm{F}(x)^{f(x)}$ se présente sous l'une des formes 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$, on aura

$$\mathrm{l}s=f(x).\mathrm{l}\mathrm{F}(x),\quad s=e^{f(x)\,\mathrm{l}\mathrm{F}(x)}=e^{\frac{\mathrm{l}\mathrm{F}(x)}{[f(x)]^{-1}}};$$

et alors pour trouver la véritable valeur de s, il suffira de calculer la vraie valeur $-\frac{\mathrm{F}'(x)f(x)^2}{\mathrm{F}(x)f'(x)}$ de l'exposant $\frac{\mathrm{l}\mathrm{F}(x)}{[f(x)]^{-1}}$.

Exemples. On a pour $x=0$,

$$x^x=e^{\frac{\mathrm{l}x}{x^{-1}}}=e^{-\frac{x^2}{x}}=e^{-x}=1;$$

pour $x = \infty$,

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{lx}{x}} = e^{\frac{1}{x}} = 1;$$

pour $x = 1$,

$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{l(x)}{1-x}} = e^{-\frac{1}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Deuxième application. *Comparaison des quantités infiniment petites des divers ordres; détermination de l'ordre d'une quantité infiniment petite, etc.*

26. *Définition.* Désignons par a un nombre constant rationnel ou irrationnel, par i une quantité infiniment petite, et par α un nombre variable. Dans le système de quantités infiniment petites dont i sera la base, une fonction de i représentée par $f(i)$ sera un infiniment petit de l'ordre a, si la limite du rapport $\frac{f(i)}{i^\alpha}$ est nulle pour toutes les valeurs de α plus petites que a, et infinie pour toutes les valeurs de α plus grandes que a.

Corollaire. Toute quantité finie qui ne s'évanouit pas ou ne devient pas infinie pour $i = 0$, peut être regardée comme un infiniment petit de l'orde 0.

Ces définitions admises, si l'on désigne par n le nombre entier immédiatement supérieur à l'ordre a de la quantité infiniment petite $f(i)$, le rapport $\frac{f(i)}{i^n}$ sera le premier terme de la progression géométrique

$$f(i),\quad \frac{f(i)}{i},\quad \frac{f(i)}{i^2},\quad \frac{f(i)}{i^3}\ \ldots\ \frac{f(i)}{i^{n-1}},\quad \frac{f(i)}{i^n}\ldots,$$

qui cessera de s'évanouir avec i.

De plus, on aura successivement

$$\text{lim.}\, f(i) = 0,\quad f(0) = 0,\quad \text{lim.}\,\frac{f(i)}{i} = \text{lim.}\, f'(i),\quad f'(0) = 0,$$

$$\lim. \frac{f(i)}{i^2} = \lim. \frac{f'(i)}{2i} = \lim. \frac{f''(i)}{1.2},\ f''(0) = 0 \ldots \text{ etc.},$$

$$\lim. \frac{f(i)}{i^n} = \lim. \frac{f^{(n)}(i)}{1.2.3\ldots n} = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n},$$

$$f^{(n)}(0) = 1.2.3\ldots n \ \lim. \frac{f(i)}{i^n};$$

on en conclura que les dérivées $f'(i)$, $f''(i)$,... $f^{(n-1)}(i)$ s'évanouiront toutes avec i, et que par conséquent, dans le cas où, comme nous l'avons supposé, $f(i)$ est un infiniment petit de l'ordre a, $f^{(n)}(i)$ est la première des dérivées de $f(i)$ qui ne s'évanouit pas avec i et qui cesse d'être une quantité infiniment petite.

Quant au rapport $\frac{f(i)}{i^a}$, il peut avoir une limite finie, ou nulle, ou infinie. Ainsi, par exemple,

$$i^a e^i, \quad \frac{i^a e^i}{\mathrm{l}i}, \quad i^a e^i \,\mathrm{l}i,$$

sont trois quantités infiniment petites de l'ordre a, et le quotient que l'on obtient en les divisant par i^a, savoir

$$e^i, \quad \frac{e^i}{\mathrm{l}i}, \quad e^i \,\mathrm{l}i,$$

ont pour limites respectives

$$1, \quad 0, \, -\frac{1}{0}.$$

27. THÉORÈME I[er]. Si dans un système quelconque on considère deux quantités infiniment petites d'ordres différents, pendant que ces deux quantités s'approcheront indéfiniment de 0, celle qui sera d'un ordre plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique.

Démonstration. Concevons que dans le système dont la base est i, on désigne par $\mathrm{A} = f(i)$, $\mathrm{B} = \mathrm{F}(i)$ deux quantités infiniment petites, la première de l'ordre a la seconde de l'ordre b, et supposons $a < b$: si l'on attribue

à α une valeur comprise entre a et b, les deux rapports $\frac{A}{i^\alpha}, \frac{B}{i^\alpha}$ auront pour limites respectives, le premier $\frac{1}{0}$ ou ∞, le second o, et par suite le quotient de ces rapports ou la fraction $\frac{B}{A}$ aura une limite nulle, la valeur numérique du numérateur B décroîtra donc beaucoup plus rapidement que celle du dénominateur A, et cette dernière finira par devenir constamment supérieure à l'autre.

28. Théorème 2e. Soient a, b, c,... les nombres qui indiquent dans un système déterminé les ordres de plusieurs quantités infiniment petites, et a le plus petit de ces nombres, la somme ou la différence des quantités dont il s'agit sera un infiniment petit de l'ordre a.

Démonstration. Soit toujours i la base du système adopté, soient de plus A, B, C,.... les quantités données, la première de l'ordre a, la seconde de l'ordre b...; le rapport de la somme $A \pm B \pm C \pm \ldots$ à la quantité A, savoir, $1 \pm \frac{B}{A} \pm \frac{C}{A} \pm \ldots$ aura pour limite l'unité, parce que les termes $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$, dans lesquels les numérateurs sont des infiniment petits d'un ordre plus élevé que les dénominateurs, ont o pour limite; et par conséquent le produit

$$\left(1 \pm \frac{B}{A} \pm \frac{C}{A} \pm \ldots\right)\frac{A}{i^\alpha} = \frac{A \pm B \pm C \pm \ldots}{i^\alpha}$$

aura la même limite que le rapport $\frac{A}{i^\alpha}$: et puisque ce dernier rapport a une limite nulle ou infinie, suivant qu'on suppose $\alpha < a$ ou $\alpha > a$, on pourra en dire autant du rapport $\frac{A \pm B \pm C \pm \ldots}{i^\alpha}$; donc $A \pm B \pm C \pm \ldots$ sera une quantité infiniment petite de l'ordre a.

On conclura facilement de ce qui précède, que pour de très petites valeurs numériques de la base i, la somme ou la différence de plusieurs quantités infiniment petites, rangées de manière que leurs ordres forment une suite croissante, a constamment le signe de son premier terme.

29. Théorème 3e. Dans un système quelconque dont la base est i, le produit de deux quantités infiniment petites A et B dont les ordres sont désignés par a et b est une autre quantité infiniment petite de l'ordre $a+b$.

Démonstration. Les rapports $\frac{A}{i^\alpha}$, $\frac{B}{i^\beta}$ auront des limites nulles toutes les fois que l'on supposera $\alpha < a$, $\beta < b$; des limites infinies toutes les fois que l'on supposera $\alpha > a$, $\beta > b$, et l'on pourra en dire autant du produit $\frac{A}{i^\alpha} \times \frac{B}{i^\beta} = \frac{AB}{i^{\alpha+\beta}}$, d'où il résulte que le rapport $\frac{AB}{i^{\alpha+\beta}}$ aura une limite nulle pour $\alpha+\beta < a+b$ et une limite infinie pour $\alpha+\beta > a+b$; donc le produit AB sera un infiniment petit de l'ordre $a+b$. On en conclut: 1° que si l'un des facteurs se réduisait à une quantité finie, le produit serait évidemment du même ordre que l'autre facteur; 2° que dans un système quelconque le produit de plusieurs quantités infiniment petites dont les ordres sont désignés par a, b, c... est une quantité infiniment petite de l'ordre $a+b+c+\ldots$

30. Théorème 4e. Si trois quantités infiniment petites i, A, B, sont telles, que la première i étant prise pour base, la seconde A soit de l'ordre a, et que la seconde A étant prise pour base, la troisième B soit de l'ordre b, celle-ci, dans le système qui a pour base la première i, sera d'un ordre équivalent au produit ab.

Démonstration. Les deux rapports $\frac{A}{i^\alpha}$, $\frac{B}{A^\beta}$ ont, par hypothèse, des limites nulles quand on fait $\alpha < a$, $\beta < b$,

et des limites infinies quand on suppose $\alpha > a$, $\beta > b$; donc le produit $\left(\frac{\text{A}}{i^\alpha}\right)^\beta \times \frac{\text{B}}{\text{A}^\beta} = \frac{\text{B}}{i^{\alpha\beta}}$ aura lui-même une limite nulle pour $\alpha\beta < ab$, une limite infinie pour $\alpha\beta > ab$, et par conséquent si l'on prend i pour base, B sera un infiniment petit de l'ordre ab.

Corollaire 1er. Le rapport entre les ordres de deux quantités infiniment petites B et A reste le même quelle que soit la base du système que l'on adopte, et ce rapport est équivalent au nombre b qui indique l'ordre de la première quantité quand on prend pour base la seconde. Donc, si après avoir déterminé pour une certaine base les ordres de plusieurs quantités infiniment petites, on vient à changer de base, les nombres qui indiquent ces divers ordres croîtront ou décroîtront tous à la fois dans un rapport donné.

Corollaire 2me. Si dans le théorème 4 on fait $\text{B} = i$, on aura évidemment $ab = 1$, $b = \frac{1}{a}$, donc si dans le système dont la base est i la quantité A est un infiniment petit de l'ordre a, i sera de l'ordre $\frac{1}{a}$ dans le système qui aura pour base la quantité A. Ainsi, par exemple, lorsque A, considéré comme fonction de i, est un infiniment petit du premier ordre, on pourra en dire autant de i considéré comme fonction de A.

Corollaire 3me. Si deux quantités infiniment petites sont telles, que l'une étant prise pour base, l'autre soit du premier ordre, le nombre qui exprimera l'ordre d'une quantité quelconque restera le même dans les deux systèmes qui auront pour base les deux quantités données.

31. Théorème 5e. Si l'on désigne par i et par $f(i)$ deux quantités infiniment petites, zéro sera la valeur unique

ou l'une des valeurs que prendra le ~~produit~~ rapport $\frac{f(i)}{f'(i)}$ lorsqu'on y fera évanouir la quantité i.

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer ce théorème dans le cas où la fonction dérivée $f'(i)$ s'évanouit en même temps que $f(i)$ pour $i=0$; or on y parviendra sans peine dans le cas où les deux fonctions $f(i)$, $f'(i)$ sont continues par rapport à i dans le voisinage de la valeur particulière $i=0$: en effet, on aura dans cette hypothèse

$$f(i)=if'(\theta i), \quad \frac{f(i)}{f'(i)}=i\frac{f'(\theta i)}{f'(i)};$$

or puisque $f'(0)$ est nul et que θ désigne une quantité comprise entre o et i, $f'(\theta i)$ convergera plus rapidement que $f'(i)$ vers la limite o, d'où il résulte que la fonction $\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$ sera plus petite que l'unité, et que le produit $i\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$ aura une valeur sensiblement nulle ; donc la limite ou l'une des limites vers lesquelles convergeront ce même produit, et par suite le rapport $\frac{f(i)}{f'(i)}$, sera égale à o.

On pourrait démontrer encore que si la fonction $f(i)$, dans le système de quantités infiniment petites dont i représente la base, est un infiniment petit de l'ordre a, le nombre a sera ordinairement la valeur numérique ou du moins l'une des valeurs que recevra le produit $\frac{if'(i)}{f(i)}$. Supposons en effet que $f(i)$ est un infiniment petit de l'ordre a, et posons

$$f(i)=i^a\varphi(i),$$

De cette équation, l'on tirera en différentiant,

$$f'(i)=ai^{a-1}\varphi(i)+i^a\varphi'(i), \quad \frac{f'(i)}{f(i)}=\frac{a}{i}+\frac{\varphi'(i)}{\varphi(i)},$$
$$\frac{if'(i)}{f(i)}=a+\frac{i\varphi'(i)}{\varphi(i)};$$

et dans tous les cas où le produit $\frac{i\varphi'(i)}{\varphi(i)}$ s'évanouirait avec i, ce qui arrivera par exemple si le rapport $\frac{\varphi'(i)}{\varphi(i)}$ conserve une valeur finie, $a = \lim. \frac{if'(i)}{f(i)}$.

32. Ces considérations sur les quantités infiniment petites conduisent naturellement aux règles dont l'ensemble constitue la méthode infinitésimale. Cette méthode, qui est comme une simplification pratique du calcul différentiel, repose toute entière sur ce principe fondamental : Deux sommes de quantités infiniment petites des divers ordres ne peuvent jamais être égales sans que, dans ces deux sommes, les quantités infiniment petites de même ordre soient égales séparément, c'est-à-dire que si

$$A_a,\ A_{a'},\ A_{a''},\ldots\quad B_a,\ B_{a'},\ B_{a''},\ldots$$

sont des quantités infiniment petites des ordres a, a', a'', l'équation

$$A_a + A_{a'} + A_{a''}\ldots = B_a + B_{a'} + B_{a''}\ldots,$$

entraînera nécessairement les suivantes

$$A_a = B_a,\quad A_{a'} = B_{a'},\quad A_{a''} = B_{a''},\ \text{etc.}$$

Démonstration. Supposons que les nombres a, a', a''... soient rangés par ordre de grandeur, et que a soit le plus ~~grand~~ petit; dans l'équation

$$A_a + A_{a'} + A_{a''}\ldots = B_a + B_{a'} + B_{a''},$$

mise sous la forme

$$(A_a - B_a) + (A_{a'} - B_{a'}) + (A_{a''} - B_{a''})\ldots = 0,$$

le terme $A_a - B_a$ sera encore un infiniment petit de l'ordre a, et l'emportera sur la somme de tous les autres; donc, si ce terme n'est pas nul ou si l'on n'a pas $A_a = B_a$, cette équation sera impossible. Ce que nous venons de dire des deux termes A_a, B_a s'étend évidemment à tous

les autres ; on aura donc nécessairement

$$A_a = B_a, \quad A_{a'} = B_{a'}, \quad A_{a''} = B_{a''}, \text{ etc.}$$

De cette proposition générale on déduit les règles suivantes :

Règle 1re. Deux quantités finies ou, ce qui revient au même, infiniment petites de l'ordre 0, qui ne différeraient l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite, sont rigoureusement égales.

Règle 2me. Deux quantités infiniment petites du premier ordre dont la différence serait infiniment petite du second ordre, ou plus généralement deux quantités infiniment petites d'un ordre quelconque, qui ne différeraient l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur, sont rigoureusement égales.

Règle 3me. On peut rigoureusement, et sans crainte d'altérer les résultats, négliger, dans une équation, soit des infiniment petits ajoutés à des quantités finies, soit des quantités infiniment petites d'un ordre quelconque ajoutées à des quantités infiniment petites d'un ordre inférieur.

Règle 4me. Dans le cas où l'accroissement Δx de la variable indépendante peut être considéré comme une quantité infiniment petite du premier ordre, ce qui arrive toujours dans les applications à la géométrie, à la mécanique, etc. ; la différentielle dy de la variable dépendante, diffère de son accroissement Δy d'une quantité infiniment petite du second ordre ; on trouverait en effet, en partant des principes déjà démontrés,

$$\Delta y = F'(x)\Delta x + \frac{\Delta x^2}{1.2} F''(x + \theta_2 \Delta x) :$$

on pourra donc, comme nous l'avons indiqué, substituer rigoureusement l'accroissement à la différentielle, et réciproquement.



SEPTIÈME LEÇON.

Suite des applications analytiques.

TROISIÈME APPLICATION. *Recherche des maxima et des minima d'une fonction d'une seule variable.*

33. Lorsqu'une valeur particulière $F(x_0)$ de la fonction $F(x)$ surpasse toutes les valeurs voisines, c'est-à-dire toutes celles qu'on obtiendrait en faisant varier x en plus ou en moins d'une quantité très petite h, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un *maximum*.

Lorsqu'une valeur particulière $F(x_0)$ de la fonction $F(x)$ est inférieure à toutes les valeurs très voisines, elle prend le nom de *minimum*.

Pour un maximum, il faut donc que la fonction cesse de croître pour décroître; pour un minimum, il faut qu'elle cesse de décroître pour croître; ce qui exige, comme nous l'avons vu, que la dérivée passe du négatif au positif, ou du positif au négatif, et par conséquent que pour $x = x_0$ (x_0 étant la valeur qui convient au maximum ou au minimum) la dérivée $F'(x)$, si elle ne cesse pas d'être réelle, devienne nulle ou infinie. Les valeurs de x qui rendent alors la fonction maximum ou minimum devront donc vérifier l'une des équations $F'(x) = 0$, $F'(x) = \infty$. Soit x_0 une des racines de ces deux équations : la valeur correspondante de $F(x)$, savoir $F(x_0)$, sera un maximum, si dans le voisinage de $x = x_0$ la fonction dérivée $F'(x)$ est positive pour $x = x_0 - h$ et négative pour $x = x_0 + h$.

Au contraire, $F(x_0)$ sera un minimum si la fonction dérivée $F'(x)$ est négative pour $x = x_0 - h$ et positive pour $x = x_0 + h$.

Enfin, si entre les limites $x_0 - h$ et $x_0 + h$ la fonction dérivée $F'(x)$ était constamment positive ou constamment négative, la quantité $F(x_0)$ ne serait ni un maximum ni un minimum.

Exemples :

1°. $$F(x) = x^2 + px + q, \quad F'(x) = 2x + p.$$

Cette dérivée s'évanouit pour $x = -\frac{p}{2}$, et devient négative pour $x < -\frac{p}{2}$, positive pour $x > -\frac{p}{2}$. La fonction $x^2 + px + q$ admet donc une valeur minimum correspondante à $x = -\frac{1}{2}p$; cette valeur minimum est $q - \frac{1}{4}p^2$.

2°. $$F(x) = \frac{a^x}{x}, \quad F'(x) = \frac{a^x}{x}\left(\frac{1}{\text{L}e} - \frac{1}{x}\right).$$

Cette dérivée, qui s'évanouit pour $x = \text{L}e$, est positive pour $x > \text{L}e$ et négative pour $x < \text{L}e$; la fonction a donc une valeur minimum $\frac{a^{\text{L}e}}{\text{L}e} = \frac{e}{\text{L}e}$.

3°. La fonction $\frac{\text{L}x}{x}$ admet, au contraire, la valeur maximum $\frac{\text{L}e}{e}$; car $D'_x\left(\frac{\mathcal{L}x}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(\mathcal{L}e - \mathcal{L}x)$, laquelle, x étant [illegible], positive quand $x < e$, négative pour $x > e$ [illegible]

4°. $x^a e^{-x}$ acquiert pour $x = a$ la valeur maximum $a^a e^{-a}$.

34. Il est facile de décider si une racine quelconque x_0 de l'équation $F'(x) = 0$ produit un maximum ou un minimum de la fonction $F(x)$. En effet, désignons par $F^{(n)}(x)$ la première des dérivées de $F(x)$ qui ne s'évanouisse pas pour $x = x_0$, nous aurons, d'après un théorème déjà démontré n° 22, corollaire 3,

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(x_0+\theta_n h)$$
$$=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}[F^{(n)}(x_0)+R_n h].$$

Si h est très petit, comme nous pouvons le supposer, le second membre aura le signe de son premier terme $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(x_0)$, et dès lors, 1° si n est impair, ce premier terme changeant de signe avec h, il en sera de même de la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$, et la valeur $F(x_0)$, plus grande que $F(x_0-h)$ et plus petite que $F(x_0+h)$, ou plus petite que $F(x_0-h)$ et plus grande que $F(x_0+h)$ ne pourra être ni un minimum, ni un maximum.

2°. Si n est pair, la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$ qui ne changera pas de signe avec h, sera positive si $F^{(n)}(x_0)>0$ et négative si $F^{(n)}(x_0)<0$, et par conséquent la valeur $F(x_0)$ sera un minimum dans le premier cas et un maximum dans le second.

Nous arrivons ainsi à cette règle générale : Lorsqu'une valeur particulière x_0 de x dans le voisinage de laquelle la fonction $F(x)$ reste continue, fait évanouir les dérivées de $F(x)$ jusqu'à celles de l'ordre n exclusivement, la valeur correspondante de $F(x)$ ne peut être un maximum ou un minimum que dans le cas où la dérivée qui la première cesse de s'évanouir est une dérivée d'ordre pair, c'est-à-dire dans le cas où n est un nombre pair; dans ce cas la fonction $F(x)$ sera un minimum si la valeur de $F^{(n)}(x)$ est positive, et un maximum si la valeur de $F^{(n)}(x)$ est négative.

Exemple :

$F(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}$, $F'(x)=e^x-2\sin x-e^{-x}$,
$F''(x)=e^x-2\cos x+e^{-x}$, $F'''(x)=e^x+2\sin x-e^{-x}$,
$F^{\text{IV}}(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}$.

Les trois premières dérivées s'évanouissent pour $x=0$,

la quatrième se réduit à 4; donc la valeur de $F(x)$ correspondante à $x=0$, ou le nombre 4, sera un minimum de cette fonction.

Scolie. On a $d^n y = F^{(n)}(x)\,dx^n$, et par conséquent si n est pair, $d^n y$ étant toujours de même signe que $F^{(n)}(x)$, on pourra, dans l'application de la règle précédente, substituer les différentielles aux dérivées.

35. Outre les maxima et les minima qui répondent aux racines des équations $F'(x)=0$ et $F'(x)=\infty$, il peut en exister d'autres qui répondent aux valeurs de x pour lesquelles la fonction $F(x)$ cesse d'être réelle ou continue, de sorte que dans la recherche des maxima et minima il faut en général commencer par déterminer les valeurs de x qui rendent la fonction $F(x)$ imaginaire ou discontinue, et voir si les valeurs correspondantes de cette fonction surpassent les valeurs voisines ou leur sont inférieures. Dans le premier cas, elles seraient un maximum, dans le deuxième un minimum.

Exemples :

$$F(x)=\sqrt{x},\quad F(x)=\frac{1}{lx},\quad F(x)=xlx.$$

Ces trois fonctions deviennent discontinues en passant du réel à l'imaginaire, tandis que la variable x passe du positif au négatif, et obtiennent pour $x=0$ une valeur nulle qui représente un minimum de la première et un maximum de chacune des deux autres.

36. *Applications.* 1°. Partager un nombre en deux parties x et $a-x$ telles, que le produit $y=F(x)=x^m(a-x)^n$ soit un minimum ou un maximum.

La valeur maximum de ce produit correspond à $x=\dfrac{ma}{m+n}$. Il y aura de plus deux valeurs minimum correspondantes à $x=0$, $x=a$, pourvu que m et n soient pairs.

2°. De tous les triangles construits sur une même base et isopérimètres, quel est le plus grand?

Soit a la base donnée, $2p$ le périmètre ou la somme des trois côtés, x un second côté, le troisième sera $2p-a-x$, et la surface du triangle

$$T = F(x) = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}.$$

Cette surface est un maximum lorsque x étant égal à $\frac{2p-a}{2}$, le triangle devient isoscèle.

3°. De tous les carrés inscrits dans un carré donné, quel est le plus petit?

En nommant a le côté du carré donné, x la distance d'un des sommets du carré inscrit au sommet le plus voisin du carré donné, la surface du carré est

$$Q = F(x) = 2x^2 - 2ax + a^2,$$

et cette surface est un minimum lorsque $x = \frac{a}{2}$, c'est-à-dire lorsque le carré intérieur est formé par les droites qui joignent les milieux des côtés du carré donné.

4°. Quel est, dans l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, le maximum de l'angle V de deux cordes supplémentaires?

En désignant par x la tangente de l'angle obtus que fait, avec l'axe des x, l'une des cordes supplémentaires, la tangente de l'angle des deux cordes est

$$\text{tang } V = F(x) = \frac{a^2x^2 + b^2}{x(a^2 - b^2)},$$

et l'angle est un maximum lorsque $x = -\frac{b}{a}$.

5°. Chercher le nombre x dont la racine $x^{ième}$ est un maximum;

$x^{\frac{1}{x}}$ est un maximum lorsque $x = e$.



HUITIÈME LEÇON.

Suite des applications analytiques.

QUATRIÈME APPLICATION. *Développement d'une fonction réelle suivant les puissances ascendantes et entières de la variable* x; *formules de Taylor et de Maclaurin.*

37. Lorsqu'une fonction $F(x)$ étant réelle et continue avec ses dérivées, ces dérivées jusqu'à celles de l'ordre n exclusivement s'évanouissent pour $x = x_0$, on a, comme nous l'avons vu,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^n}{1.2.3..n} F^{(n)}(x_0 + \theta h);$$

ou en supposant que x_0 soit nul et faisant $h = x$,

$$F(x) - F(0) = \frac{x^n}{1.2.3..n} F^{(n)}(\theta x),$$

et si $F(0) = 0$,

$$F(x) = \frac{x^n}{1.2.3..n} F^{(n)}(\theta x).$$

Or ces équations fournissent un moyen très simple de développer les fonctions réelles d'une seule variable suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable.

En effet, en posant $n = 1$, il vient

$$F(x) - F(0) = xF'(\theta x),$$

et en faisant

$$F'(\theta x) = F'(0) + R_1,$$

$$F(x) - F(0) - xF'(0) = R_1 x.$$

$R_1 x$ est évidemment une quantité qui s'évanouit avec x,

ainsi que sa dérivée première $F'(x) - F'(o)$, et dont la dérivée seconde est $F''(x)$ nous aurons donc

$$F(x) - F(o) - xF'(o) = \frac{x^2}{1.2} F''(\theta x).$$

Posons encore

$$F''(\theta x) = F''(o) + R_2,$$

il vient

$$F(x) - F(o) - xF'(o) - \frac{x^2}{1.2} F''(o) = R_2 \frac{x^2}{1.2}.$$

$R_2 \frac{x^2}{1.2}$ est encore évidemment une quantité, fonction de x, qui s'évanouit avec x ainsi que ses dérivées première et seconde

$$F'(x) - F'(o) - xF''(o), \quad F''(x) - F''(o),$$

et dont la dérivée troisième est $F'''(x)$; on aura donc

$$F(x) - F(o) - xF'(o) - \frac{x^2}{1.2} F''(o) = \frac{x^3}{1.2.3} F'''(\theta x).$$

En continuant de la même manière, et observant que les fonctions $\frac{R_3 x^3}{1.2.3}$, $\frac{R_4 x^4}{1.2.3.4}$, etc., s'évanouiront avec x ainsi que leurs dérivées, jusqu'à celles du troisième, du quatrième, du $(n-1)^{ième}$ ordre inclusivement, on aura définitivement l'équation

$$F(x) - F(o) - \frac{x}{1} F'(o) - \frac{x^2}{1.2} F''(o) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(o) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(\theta x),$$

et

$$F(x) = F(o) + \frac{x}{1} F'(o) + \frac{x^2}{1.2} F''(o) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(o) + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(\theta x);$$

la fonction continue quelconque $F(x)$ peut donc être con-

sidérée comme composée d'une fonction entière de x,

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}F^{(n-1)}(0),$$

et d'un reste, savoir

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x).$$

Exemples :

1°. $$F(x)=e^x,$$

on a

$$F'(x)=F''(x)=\ldots=F^{(n-1)}(x)=F^{(n)}(x)=e^x,$$
$$F'(0)=F''(0)=\ldots=F^{(n-1)}(0)=1,\quad F^{(n)}(\theta x)=e^{\theta x},$$

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{x^n}{1.2.3..n}e^{\theta x};$$

2°. $$F(x)=\sin x,$$

$$F^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad F(0)=0,\quad F'(0)=1,$$

$$F''(0)=0,\quad F'''(0)=-1\ldots F^{(n-1)}(0)=\sin\frac{(n-1)\pi}{2},$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.5}\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}\sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right)+\frac{x^n}{1.2.3..n}\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

3°. $$F(x)=\cos x,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{x^n}{1.2.3..n}\cos\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

4°. $$F(x)=(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2\ldots\ldots$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+2)x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^n}{1.2.3\ldots n}(1+\theta x)^{\mu-n}.$$

5°. $F(x)=\text{arc tang}\,x$, on aura

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}+\frac{1}{1+x\sqrt{-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(1-x\sqrt{-1})^{-1}+(1+x\sqrt{-1})^{-1}\right],\ldots$$

$$F^n(x)=(\sqrt{-1})^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\left[(1-x\sqrt{-1})^{-n}-(1+x\sqrt{-1})^{-n}(-1)^n\right],$$

$$F^n(0)=(\sqrt{-1})^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\left[1-(-1)^n\right];$$

et par suite, si n est pair, $F^n(0)=0$; si n est impair,

$$F^n(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,1.2.3\ldots(n-1),$$

$$\text{arc tang}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\ldots\ldots\pm\frac{x^{n-1}}{n-1}$$
$$\mp\frac{x^n}{n}\,\frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}\mp(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}.$$

6°. Si la fonction $F(x)$ est entière et du degré n, sa dérivée de l'ordre n se réduit à une quantité constante; on a donc alors $F^{(n)}(\theta x)=F^{(n)}(0)$

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}F'''(0)\ldots\ldots$$
$$+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(0).$$

Exemple : si $F(x) = (1 + x)^n$, on trouvera

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 \ldots + \frac{n}{1}x^{n-1} + x^n.$$

38. A l'aide des mêmes principes, on développera facilement $F(x+h)$, suivant les puissances ascendantes de x ou de h. En effet, nous avons

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x+\theta h) = hF'(x) + R_1;$$

d'où

$$F(x+h) - F(x) - hF'(x) = R_1.$$

R_1 est une fonction de h qui s'évanouit pour $h = 0$, ainsi que sa dérivée première $F'(x+h) - F'(x)$; de plus sa dérivée seconde est $F''(x+h)$: on aura donc, d'après un théorème souvent cité,

$$F(x+h) - F(x) - hF'(x) = \frac{h^2}{1.2}F''(x+\theta h) = \frac{h^2}{1.2}F''(x) + R_2,$$

$$F(x+h) - F(x) - hF'(x) - \frac{h^2}{1.2}F''(x) = R_2.$$

R_2 est une fonction de h qui s'évanouit avec h, ainsi que ses dérivées première et seconde, et dont la dérivée troisième est $F'''(x+h)$; on aura donc

$$F(x+h) - F(x) - hF'(x) - \frac{h^2}{1.2}F''(x) = \frac{h^3}{1.2.3}F'''(x+\theta_3 h),$$

et en continuant de la même manière, on trouvera définitivement

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) \ldots\ldots\ldots \\ + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(x+\theta h); \end{aligned} \right.$$

en posant dans l'équation (1) $x=0$, $h=x$, on trouverait

$$(2)\quad F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x);$$

cette dernière formule n'est donc qu'un cas particulier de celle qui précède. On pourrait cependant aussi déduire la formule (1) de la formule (2); en effet, posons

$$F(h)=f(x+h),$$

on en tirera

$$F'(h)=f'(x+h),\ F''(h)=f''(x+h),\ldots F^{(n)}(h)=f^{(n)}(x+h),$$
$$F(0)=f(x),\ F'(0)=f'(x),\ldots\ldots F^{(n)}(\theta h)=f^{(n)}(x+\theta h),$$

or, en vertu de l'équation (2),

$$F(h)=F(0)+hF'(0)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta h);$$

on aura donc en substituant

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)\ldots\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

formule identique avec la formule (1).

Corollaire. Si dans la formule (1), après avoir posé $h=a-x$, on change a en x et x en a, on trouvera

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} F(x)=F(a)+(x-a)F'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a)+\ldots\\ +\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}F^n[a+\theta(x-a)].\end{aligned}\right.$$

Exemples : $F(x)=x^\mu$, $F(x)=lx$,

$$x^\mu=a^\mu+\mu a^{\mu-1}(x-a)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^{\mu-2}(x-a)^2+\ldots$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}(x-a)^n[a+\theta(x-a)]^{\mu-n},$$

$$l\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{x-a}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a}\right)^3\ldots$$
$$\pm\frac{1}{n-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)^{n-1}\mp\frac{1}{n}\left[\frac{x-a}{a+\theta(x-a)}\right]^n.$$

39. Lorsque, pour des valeurs de x comprises entre certaines limites, les expressions

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x+\theta h),\qquad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^n(\theta x),$$

décroissent indéfiniment tandisque n augmente, alors, en posant $n=\infty$ dans les équations (1) ou (2), on trouve

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}.F'''(x)+\text{etc.},$$
$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}F'''(0)+\text{etc.}$$

Ces formules, qui donnent le développement en séries de $F(x)$ suivant les puissances de x, et de $F(x+h)$ suivant les puissances de h, s'appellent, la première, la formule de Taylor, la seconde, la formule de Maclaurin.

40. Il est important de remarquer que les quantités

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{h^n}{1.2.3\ldots n},$$

s'évanouissent pour une valeur infinie de n. En effet, le produit $m(n-m+1)$, qui peut se mettre sous la forme $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n+1}{2}-m\right)^2$, ou dont la dérivée prise par rapport à m est $2\left(\frac{n+1}{2}-m\right)$, croît évidemment avec m, depuis $m=1$ jusqu'à $m=\frac{n+1}{2}$, ou croît à mesure que ses deux facteurs approchent d'être égaux : on en conclura, en faisant tour à tour $m=1$, $m=2$, etc., que des n quantités

$$1.n,\ 2(n-1),\ 3(n-2)\ldots\ (n-2)3,\ (n-1)2,\ n.1,$$

la plus petite sera la première, et que par conséquent leur produit $[1.2.3\ldots(n-1)n]^2$ sera plus ~~petit~~ grand que cette première n élevée à la puissance n : on aura donc

$$1.2.3\ldots n > n^{\frac{n}{2}} = (\sqrt{n})^n, \quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} < \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n;$$

or cette dernière quantité s'évanouit pour $n = \infty$; il en sera donc ainsi de $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$ et $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$.

Corollaire. Si les deux quantités $F^{(n)}(\theta x)$, $F^{(n)}(x+\theta h)$, conservent toujours des valeurs finies, les produits

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^n(\theta x), \quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x+\theta h),$$

diminueront indéfiniment à mesure que n augmentera ; on pourra donc alors employer les séries de Taylor et de Maclaurin au développement de $F(x)$ et de $F(x+h)$. C'est ce qui aura lieu si l'on prend

$$F(x) = e^x, \quad F(x) = \sin x, \quad F(x) = \cos x, \quad F(x) = a^x,$$

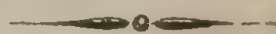
et l'on trouvera par conséquent

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5}, \text{etc.},$$

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}, \text{etc.},$$

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\mathrm{l}a + \frac{x^2}{1.2}\mathrm{l}a^2 + \frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{l}a^3, \text{etc.}$$



NEUVIÈME LEÇON.

Suite des applications analytiques.

Règles générales de la convergence des séries réelles. Application de ces règles aux formules de Taylor et de Maclaurin.

41. Les formules de Maclaurin et de Taylor ne peuvent subsister qu'autant que les séries

$$F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) \ldots \text{etc.},$$

$$F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) \ldots \text{etc.},$$

seront convergentes ; il importe donc de fixer les conditions de la convergence de ces séries. Une série, en général, est une suite de quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots u_n \ldots,$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée ; ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série qu'on considère, u_n est le terme général. Soit

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

la somme des n premiers termes ; si pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme S_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite finie S, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera la somme de la série ; au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme S_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série

sera divergente et n'aura plus de somme. L'une des séries les plus simples est la progression géométrique,

$$a, \quad ax, \quad ax^2, \ldots\ldots\ldots \quad ax^n,$$

qui a pour terme général ax^n; la somme des n premiers termes

$$S_n = a(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = a\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$$

convergera évidemment pour des valeurs croissantes de n vers la limite fixe $\frac{a}{1-x}$, si la valeur numérique de x est inférieure à l'unité; au contraire, cette somme croîtra indéfiniment si $x \geqq 1$: la série sera donc convergente dans le premier cas et divergente dans le second.

Considérons maintenant la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots \quad u_n, \text{ etc.}$$

Pour que cette série soit convergente, il faut et il suffit que la somme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

converge à mesure que n augmente vers une limite fixe et finie S, ou que, n devenant infini, les sommes S_n, S_{n+1}, $S_{n+2}\ldots$ diffèrent infiniment peu de la limite S, et par conséquent les unes des autres. Or

$$S_{n+1} - S_n = u_n, \quad S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1}, \text{ etc.}$$

Il faudra donc que ces différences soient infiniment petites quand n sera très grand; et par suite, il faudra que le terme général u_n et la somme des termes pris à partir de u_n, en tel nombre que l'on voudra, s'évanouissent pour $n = \infty$.

Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est évidemment assurée.

42. Ces principes nous fournissent deux moyens assez simples de reconnaître, dans beaucoup de cas, si une série est convergente ou divergente.

Règle 1re. Cherchons la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(U_n)^{\frac{1}{n}}$, U_n étant la valeur numérique de u_n, et soit L la plus grande de ces limites, la série

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \text{ etc.}$$

sera convergente si l'on a $L < 1$, divergente si $L > 1$.

Démonstration. Supposons d'abord $L < 1$: en désignant par ρ un nombre plus petit que l'unité, mais supérieur à L, ou tel que l'on ait $L < \rho < 1$, et donnant à n une valeur assez considérable, $(U_n)^{\frac{1}{n}}$, qui peut différer aussi peu que l'on veut de sa limite L, finira par être plus petit que ρ : on aura

$$(U_n)^{\frac{1}{n}} < \rho, \quad u_n = \pm U_n < \rho^n,$$

de sorte que les termes de la série u_n, u_{n+1}, $u_{n+2}\ldots$, seront des nombres inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

$$\rho^n, \quad \rho^{n+1}, \quad \rho^{n+2}\ldots$$

Or le terme général et la somme des termes de cette dernière progression vont en diminuant à mesure que n augmente, puisque ρ est plus petit que 1, il en sera donc de même à plus forte raison de la somme $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}\ldots$, et la série (1) sera convergente.

Supposons en second lieu $L > 1$: n venant à croître, on aura bientôt, si l'on désigne par ρ un nombre plus grand que l'unité et compris entre L et 1, ou tel que l'on ait $L > \rho > 1$,

$$(U_n)^{\frac{1}{n}} > \rho, \quad U_n > \rho^n;$$

le terme général de la série (1) croîtra donc, ainsi que ρ^n, indéfiniment avec n, et cette série sera divergente.

Règle 2[me]. Si pour des valeurs croissantes de n, le terme général u_n décroît indéfiniment, et si le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ converge vers la limite fixe l, la série (1) sera convergente toutes les fois que l'on aura $l < 1$, et divergente toutes les fois que l'on aura $l > 1$.

Démonstration. Désignons par ε une nombre inférieur à la différence qui existe entre 1 et l, ou tel que les deux quantités $l-\varepsilon$, $l+\varepsilon$, soient en même temps que l plus petites ou plus grandes que l'unité; en donnant à n une valeur assez considérable, le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ finira par être compris entre $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$, et les différents termes de la série u_n, $u_{n+1}\ldots$, se trouveront compris entre les termes correspondants des deux progressions géométriques

$$u_n,\quad u_n(l-\varepsilon),\quad u_n(l-\varepsilon)^2,\quad u_n(l-\varepsilon)^3,\ldots$$
$$u_n,\quad u_n(l+\varepsilon),\quad u_n(l+\varepsilon)^2,\quad u_n(l+\varepsilon)^3\ldots.$$

Or, 1° ces deux progressions seront toutes deux convergentes, si l'on a $l<1$, et leurs sommes, ainsi que la somme intermédiaire $u_n + u_{n+1}$ + etc., décroîtront indéfiniment si u_n approche indéfiniment de 0 à mesure que n augmente ; 2° elles seront toutes deux divergentes, et la somme $u_n + u_{n+1}$ + etc., croîtra indéfiniment avec n si $l > 1$: la série (1) sera donc convergente dans le premier cas, divergente dans le second.

Nota. On démontre facilement que les deux limites L et l sont toujours égales. En effet, si nous donnons à m une valeur considérable, les rapports

$$\frac{U_{m+1}}{U_m},\quad \frac{U_{m+2}}{U_{m+1}}\cdots\quad \frac{U_{m+n}}{U_{m+n-1}},$$

et par suite la moyenne géométrique entre ces rapports

$\left(\frac{U_{m+n}}{U_m}\right)^{\frac{1}{n}}$ différera de l d'une quantité ε aussi petite que l'on voudra ; on aura donc

$$\left[U_n\left(1+\frac{m}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = (l \pm \varepsilon)\,(U_m)^{\frac{1}{n}},$$

et en passant à la limite, ou faisant n infini,

$$\text{lim.}\ (U_n)^{\frac{1}{n}} = L = (l \pm \varepsilon)\ U_m^0 = l \pm \varepsilon.$$

Les deux limites L et l diffèrent donc l'une de l'autre d'une quantité ε qui peut devenir aussi petite que l'on voudra, et sont par conséquent rigoureusement égales.

43. En appliquant ces deux règles aux séries de Maclaurin ou de Taylor, on obtient la proposition suivante.

Soit $F(x)$ une fonction de x, et φ_n la valeur numérique de l'expression

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(0) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(x),$$

suivant qu'il s'agira de la série de Maclaurin ou de la série de Taylor, soit de plus Φ la limite vers laquelle convergent, tandis que n croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de $(\varphi_n)^{\frac{1}{n}}$ ou bien encore la limite unique du rapport $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$, ces deux séries seront convergentes toutes les fois que la valeur numérique de x sera inférieure à $\frac{1}{\Phi}$, et divergentes toutes les fois que la valeur numérique de x surpassera $\frac{1}{\Phi}$: en effet, si l'on désigne par $u_n = \pm\varphi_n x^n$ le terme général de ces séries, on aura, dans le premier cas,

$$\text{lim.}\ (U_n)^{\frac{1}{n}} = \Phi x < 1, \quad \text{lim.}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi x < 1,$$

et dans le second

$$\lim.(U_n)^{\frac{1}{n}} = \Phi x > 1, \quad \lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi x > 1$$

Donc, etc.

Exemple : 1°. $F(x) = e^x$, $F^{(n)}(0) = 1$,

$$\varphi_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \quad \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{1}{n+1},$$

$$\Phi = \lim. \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \quad \frac{1}{\Phi} = \infty;$$

la série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

sera convergente pour une valeur réelle quelconque de la variable x;

2°. On peut en dire autant des deux séries

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

En effet, dans ce cas, $\Phi = \lim. \left(\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right)^{\frac{1}{n}}$ devra encore être plus petit que 1, puisque la série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.}$$

est convergente, quelle que soit la valeur de x.

3°. Si l'on prend $F(x) = l(1+x)$,
on trouvera

$$F^n(0) = (-1)^{n-1} 1.2.3\ldots(n-1),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{n}, \quad \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}, \quad \Phi = 1, \quad \frac{1}{\Phi} = 1;$$

donc la série

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

sera convergente tant que la valeur numérique de x sera inférieure à l'unité;

4°. On en peut dire autant de la série

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

5°. Si l'on prend $F(x) = (1 + x)^\mu$, on aura

$$F^{(n)}(0) = \mu(\mu - 1)\ldots(\mu - n + 1),$$

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{n - \mu}{n + 1} = \frac{1 - \frac{\mu}{n}}{1 + \frac{1}{n}}, \quad \Phi = 1, \quad \frac{1}{\Phi} = 1;$$

donc la série

$$(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}$$

sera convergente tant que la valeur de x restera inférieure à l'unité.

6°. On prouvera encore que ces deux formules

$$l(x + h) = l(x) + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} + \text{etc.},$$

$$(x + h)^\mu = x^\mu + \frac{\mu}{1} x^{\mu - 1} h + \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2} x^{\mu - 2} h^2 + \ldots\ldots$$

subsisteront tant que l'on aura $\frac{h}{x} < 1$, $h < x$.

44. On pourrait croire que la série de Maclaurin a toujours $F(x)$ pour somme quand elle est convergente, et que par conséquent, dans le cas où ses différents termes s'évanouissent, la fonction $F(x)$ s'évanouit elle-même; il n'en est pas ainsi. En effet, si l'on prend

$$F(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

la fonction $F(x)$ n'est pas identiquement nulle, et cependant tous les termes de la série de Maclaurin se ré-

duiront, dans ce cas, à o. 2°. Si l'on suppose

$$F(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

la série que l'on obtiendra sera convergente, et elle aura pour somme, non pas $F(x)$, mais seulement son premier terme e^{-x^2}.

45. Toutes les fois néanmoins que les fonctions $F(x)$ et $F(x+h)$ pourront être exprimées par des séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de x, ces séries coïncideront avec la série de Maclaurin ou avec la série de Taylor.

Démonstration. Supposons que l'on ait

$$F(x) = a_0 + a_1 x^\alpha + a_2 x^\beta + a_3 x^\gamma + \text{etc.},$$

α, β, γ, étant des nombres entiers rangés par ordre de grandeur; en différentiant plusieurs fois de suite, on aura

$$F'(x) = a_1 \alpha x^{\alpha-1} + a_2 \beta x^{\beta-1} + a_3 \gamma x^{\gamma-1} + \ldots,$$

$$F''(x) = a_1 \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} + a_2 \beta(\beta-1) x^{\beta-2} + a_3 \gamma(\gamma-1) x^{\gamma-2} + \ldots,$$

$$F'''(x) = a_1 \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) x^{\alpha-3} + a_2 \beta(\beta-1)(\beta-2) x^{\beta-3} + a_3 \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) x^{\gamma-3} + \ldots;$$

et puisqu'en général les quantités $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, ne doivent se réduire ni à o, ni à ∞, on aura nécessairement

$$a_0 = F(0),\ \alpha = 1,\ a_1 = \frac{F'(0)}{1},\ \beta = 2,\ a_2 = \frac{F''(0)}{1.2},\ \gamma = 3,\ a_3 = \frac{F'''(0)}{1.2.3}, \ldots$$

et par suite

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0) + \text{etc.}$$

Donc, etc...

Supposons en second lieu

$$F(x+h) = \varphi(x) + \varphi_1(x).h^{\alpha} + \varphi_2(x).h^{\beta} + \varphi_3(x).h^{\gamma} + \text{etc.};$$

en différentiant d'abord par rapport à x, puis par rapport à h, nous aurons

$$\frac{dF(x+h)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\varphi_1(x)}{dx}h^{\alpha} + \frac{d\varphi_2(x)}{dx}h^{\beta} + \frac{d\varphi_3(x)}{dx}h^{\gamma} + \text{etc.},$$

$$\frac{dF(x+h)}{dh} = \alpha\varphi_1(x).h^{\alpha-1} + \beta\varphi_2(x).h^{\beta-1} + \gamma\varphi_3(x).h^{\gamma-1} + \text{etc.};$$

puisque la fonction $F(x+h)$ est composée de la même manière en x et en h, et qu'en posant $x+h=y$, on a évidemment

$$\frac{dF(x+h)}{dx} = \frac{dF(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dF(y)}{dy}\times 1,$$

$$\frac{dF(x+h)}{dh} = \frac{dF(y)}{dy}\frac{dy}{dh} = \frac{dF(y)}{dy}\times 1 = \frac{dF(x+h)}{dx}.$$

Les deux dérivées $\frac{dF(x+h)}{dx}$, $\frac{dF(x+h)}{dh}$, sont nécessairement égales et doivent renfermer les mêmes puissances de h. Dès lors, en supposant les exposants α, β, γ... rangés par ordre de grandeur, on aura

$$\alpha = 1,\ \varphi_1(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx},\ \beta = 2,\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2}\frac{d\varphi_1(x)}{dx},$$
$$\gamma = 3,\ \varphi_3(x) = \frac{1}{3}\frac{d\varphi_3(x)}{dx}\ldots;$$

d'ailleurs, en faisant $h=0$, on trouve $\varphi(x) = F(x)$; donc

$$\varphi_1(x) = F'(x),\ \varphi_2(x) = \frac{F''(x)}{1.2},\ \varphi_3(x) = \frac{F'''(x)}{1.2.3}\ldots \text{ etc.},$$

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \text{etc. C. Q. F. D.}$$

DIXIÈME LEÇON.

Suite des applications analytiques.

Règles de convergence des séries dont le terme général est imaginaire. Application aux formules de Taylor et de Maclaurin.

46. Les règles que nous avons données sur la convergence des séries en général et des séries de Maclaurin et de Taylor en particulier, subsistent encore dans le cas où le terme général de la série u_n et la variable x ont des valeurs imaginaires, mais alors il faut substituer à ce terme général u_n et à x leurs modules.

En effet, une série dont le terme général est imaginaire et de la forme $u_n = u_n' + u_n''\sqrt{-1}$ peut être regardée comme la somme de deux séries réelles dont l'une serait multipliée par le facteur imaginaire $\sqrt{-1}$, de sorte que l'on ait

$$u_0 + u_1 + u_2 \ldots = u_0' + u_1' + u_2' \ldots + \sqrt{-1}(u_0'' + u_1'' + u_2'' + \ldots).$$

La somme $s_n = s_n' + \sqrt{-1}\, s_n''$ des n premiers termes de la première série, convergera pour des valeurs croissantes de n vers une limite fixe, si les deux sommes réelles s_n', s_n'' convergent vers de semblables limites; il en résulte que la série imaginaire sera toujours convergente en même temps que les séries réelles. D'ailleurs, comme en appelant ρ_n le module du terme général de la série imaginaire, on aura

$$\rho_n = \sqrt{u_n'^2 + u_n''^2} > u_n' > u_n'',$$

les deux séries u'_0, u'_1, ... u''_0, u''_1, ... et par suite la série u_0, u_1, ... u_n, seront convergentes si les modules

$$\rho_0, \ \rho_1, \ \rho_2, \ldots \ \rho_n,$$

forment eux-mêmes une semblable série. On déduit immédiatement de ce principe les deux théorèmes suivants.

47. 1[er] THÉORÈME. Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'une des expressions $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$; la série imaginaire sera convergente ou divergente, suivant que la limite unique ou la plus grande de ces limites sera plus petite ou plus grande que l'unité.

2[e] THÉORÈME. Soient $F(x)$ une fonction imaginaire de la variable x, et φ_n le module de l'expression $\frac{1}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(0)$; soit de plus Φ la limite vers laquelle converge, tandis que n croît indéfiniment, la limite unique ou la plus grande des limites de l'une ou l'autre des quantités $(\varphi_n)^{\frac{1}{n}}$, $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$; la série de Maclaurin sera convergente toutes les fois que la valeur numérique ou le module de x sera inférieur à $\frac{1}{\Phi}$.

Pour appliquer ce théorème à la série de Taylor, il suffit de remplacer l'expression

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(0) \quad \text{par} \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(x).$$

48. Ce dernier théorème suppose que l'on puisse étendre les formules de Maclaurin et de Taylor au cas où la variable x devient imaginaire; or c'est à quoi l'on parviendra facilement comme il suit.

Soit

$$x = p + q\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

une valeur imaginaire de la variable x; considérons r comme seul variable, et posons

$$F(x) = F\left[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)\right] = \varphi(r) + \sqrt{-1}\,\chi(r);$$

nous aurons, en différentiant plusieurs fois de suite par rapport à r,

$$F'\left[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)\right](\cos t + \sqrt{-1}\sin t) = \varphi'(r) + \sqrt{-1}\,\chi'(r),$$
$$F''\left[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)\right](\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^2 = \varphi''(r) + \sqrt{-1}\,\chi''(r),$$

. . . .

$$F^{(n)}\left[r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)\right](\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n = \varphi^{(n)}(r) + \sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(r),$$

d'où, en posant $r = 0$,

$$\varphi(0) + \sqrt{-1}\,\chi(0) = F(0),$$
$$\varphi'(0) + \sqrt{-1}\,\chi'(0) = F'(0)(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$
$$\varphi''(0) + \sqrt{-1}\,\chi''(0) = F''(0)(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^2,$$

. . . .

$$\varphi^{(n)}(0) + \sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(0) = F^{(n)}(0)(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)^n;$$

on a de plus

$$\varphi(r) = \varphi(0) + \frac{r}{1}\varphi'(0) + \frac{r^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots\ldots\ldots + \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(\theta_1 r),$$

$$\chi(r) = \chi(0) + \frac{r}{1}\chi'(0) + \frac{r^2}{1.2}\chi''(0) + \ldots\ldots\ldots + \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\chi^{(n)}(\theta_2 r),$$

et par suite

$$\varphi(r) + \sqrt{-1}\,\chi(r) = \varphi(0) + \sqrt{-1}\,\chi(0) + \frac{r}{1}\left[\varphi'(0) + \sqrt{-1}\,\chi'(0)\right] + \ldots\ldots\ldots + \frac{r^n}{1.2.3..n}\left[\varphi^{(n)}(\theta_1 r) + \sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)\right],$$

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\dots\dots\dots$$
$$+\frac{x^n}{1.2.3\dots n}\left[\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin\theta)^n}\right].$$

On peut mettre le dernier terme ou le reste de cette formule sous une autre forme ; en effet, on a

$$\varphi^{(n)}(\theta_1 r)=\varphi^{(n)}(0)+I_1,\quad \chi^{(n)}(\theta_2 r)=\chi^{(n)}(0)+I_2,$$

I_1 et I_2 étant des quantités qui s'évanouissent avec r; donc

$$\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)=\varphi^{(n)}(0)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(0)+I_1+I_2\sqrt{-1}$$
$$=F^{(n)}(0)(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n+I_1+I_2\sqrt{-1};$$

et par conséquent

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\dots+\frac{x^n}{1.2.3\dots n}[F^{(n)}(0)+I],$$

I étant une quantité $\dfrac{I_1+I_2\sqrt{-1}}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n}$ qui s'évanouit avec r, et par suite avec x.

En désignant par a une valeur particulière, réelle ou imaginaire de la variable x, et posant

$$x-a=z=\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau),$$
$$F(x)=F(a+z)=F[a+\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)]$$
$$=\Phi(\rho)+\sqrt{-1}\,X(\rho);$$

on trouverait de même, en différentiant par rapport à ρ,

$$(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)^m F^{(m)}[a+\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)]$$
$$=\Phi^{(m)}(\rho)+\sqrt{-1}\,X^{(m)}(\rho),$$

et en posant $\rho=0$,

$$F(a)=\Phi(0)+\sqrt{-1}\,X(0),$$
$$(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)F'(a)=\Phi'(0)+\sqrt{-1}\,X'(0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)^m F^{(m)}(a)=\Phi^{(m)}(0)+\sqrt{-1}\,X^{(m)}(0).$$

On aura de plus, d'après une formule connue,

$$\Phi(\rho)=\Phi(0)+\frac{\rho}{1}\Phi'(0)+\frac{\rho^2}{1.2}\Phi''(0)+\ldots+\frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}\Phi^{(n)}(\theta_1\rho),$$

$$X(\rho)=X(0)+\frac{\rho}{1}X'(0)+\frac{\rho^2}{1.2}X''(0)+\ldots+\frac{\rho^n}{1.2.3\ldots n}X^{(n)}(\theta_2\rho),$$

et l'on en conclura

$$F(x)=F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a)+\ldots$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\left[\frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,X^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)^n}\right],$$

$$F(x)=F(a)+\frac{x-a}{1}F'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a)+\ldots$$
$$+\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}[F^{(n)}(a)+I].$$

Si dans ces dernières équations, après avoir posé $x-a=h$, on change a en x, il viendra

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}[F^{(n)}(x)+I].$$

Lorsque dans ces diverses formules, on suppose que les restes

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\;\frac{\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r)}{(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)^n},$$

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\;\frac{\Phi^{(n)}(\theta_1\rho)+\sqrt{-1}\,X^{(n)}(\theta_2\rho)}{(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)^n},$$

ou seulement les quantités $\frac{Ix^n}{1.2.3\ldots n}$, $\frac{Ih^n}{1.2.3\ldots n}$, diminuent indéfiniment à mesure que n augmente, ce qui arrivera,

1°. Si x et h sont des quantités infiniment petites;

2°. Si

$$\varphi^{(n)}(\theta_1 r)+\sqrt{-1}\,\chi^{(n)}(\theta_2 r),\qquad \Phi^{(n)}(\theta_1 \rho)+\sqrt{-1}\,\mathrm{X}^{(n)}(\theta_2 \rho),$$

ou la quantité I, conservent toujours des valeurs finies, on trouvera

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(0)+\frac{x}{1}\mathrm{F}'(0)+\frac{x^2}{1.2}\mathrm{F}''(0)+\ldots\text{ etc.},$$

$$\mathrm{F}(x+h)=\mathrm{F}(x)+\frac{h}{1}\mathrm{F}'(x)+\frac{h^2}{1.2}\mathrm{F}''(x)+\ldots\text{ etc.};$$

or ces dernières formules sont évidemment les formules de Maclaurin et de Taylor, étendues au cas où la variable x et son accroissement h reçoivent des valeurs imaginaires.

La seconde des conditions ci-dessus énoncées, sera satisfaite si l'on prend pour $\mathrm{F}(x)$ une des trois fonctions e^x, $\cos x$, $\sin x$, et par conséquent les séries qui donnent ces fonctions seront convergentes pour une valeur finie quelconque, réelle ou imaginaire, de la variable x.



ONZIÈME LEÇON.

Suite des applications analytiques.

Développement d'une fonction de x *qui devient infinie pour* x = a, *suivant les puissances ascendantes de* x — a. *Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.*

49. Tous les développements obtenus jusqu'ici n'admettaient que des puissances entières de x ou $x - a$, parce que nous supposions toujours que la fonction $F(x)$ ne devenait infinie ni pour $x = 0$, ni pour $x = a$. Supposons maintenant qu'il en est autrement; que $F(a) = \infty$, $\frac{1}{F(a)} = 0$, ou que $F(x)$ soit de la forme $F(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^m}$, $\varphi(x)$ conservant une valeur finie pour $x = a$; on dit, dans ce cas, que l'équation $\frac{1}{F(x)} = \frac{(x-a)^m}{\varphi(x)}$ a m racines égales à a. Puisque, par hypothèse, la fonction $\varphi(x)$ conserve une valeur finie pour $x = a$, a ayant d'ailleurs une valeur réelle ou imaginaire, nous aurons, d'après une formule connue,

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{1}\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(a) + I,$$

I s'évanouissant quand on fait $x = a$. En divisant les deux membres de cette dernière équation par $(x-a)^m$,

on trouvera

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^m}=\mathrm{F}(x)=\frac{\varphi(a)}{(x-a)^m}+\frac{1}{1}\frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{m-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{\varphi''(a)}{(x-a)^{m-2}}\cdots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{x-a}+\frac{\varphi^m(a)}{1.2\ldots m}+\frac{\varphi^{(m+1)}(a)(x-a)}{1.2\ldots m.(m+1)}\cdots$$
$$+\frac{(x-a)^{n-m}}{1.2\ldots n}[\varphi^{(n)}(a)+\mathrm{I}].$$

A l'aide de cette dernière formule on pourra donc encore développer $\mathrm{F}(x)$ suivant les puissances entières et ascendantes de $x-a$; seulement les m premiers termes du développement renfermeront des puissances négatives de cette différence. Si l'on fait $n=m$, il viendra

$$\mathrm{F}(x)=\frac{\varphi(a)}{(x-a)^m}+\frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{m-1}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\varphi''(a)}{(x-a)^{m-2}}\cdots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(x-a)}+\frac{\varphi^{(m)}(a)}{1.2.3\ldots m}+\mathrm{I}.$$

$\varphi^{(m)}(a)$ conservera en général une valeur finie; c'est ce qui arrivera en particulier si $f(x)$ et $\mathrm{f}(x)$ sont deux fonctions entières de x, c'est-à-dire si $\mathrm{F}(x)$ devient une fraction rationnelle $\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}$; alors, en désignant par m le nombre des racines de l'équation $\mathrm{f}(x)=0$ égales à a, par n, p, q... le nombre des racines égales à b, c, d,... et par N un coefficient constant, on aura

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{N}(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots,$$
$$\varphi(x)=(x-a)^m\times\mathrm{F}(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{N}(x-b)^n(x-c)^p\ldots}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{N}}f(x)(x-b)^{-n}(x-c)^{-p}\ldots.$$

On obtiendrait $\varphi^{(m)}(a)$ en différentiant m fois cette dernière expression, et remplaçant x par a, or l'on voit évidemment que $\varphi^{(m)}(a)$ ne deviendra pas infinie pour $x=a$.

De plus, en posant

$$\varphi(a) = A_m, \quad \varphi'(a) = A_{m-1}, \quad \frac{\varphi''(a)}{1.2} = A_{m-2} \ldots$$
$$\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)} = A_1, \ \chi(x) = \frac{\varphi^{(m)}(a)}{1.2.3\ldots m} + I,$$

on trouve

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \chi(x).$$

50. La fraction rationnelle $\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}$ peut donc être décomposée en deux parties dont l'une est la somme de plusieurs fractions qui offriront des numérateurs constants, et qui auront pour dénominateurs les puissances de $x-a$, tandis que l'autre partie $\chi(x)$ conserve une valeur finie pour $x=a$.

En représentant par

$$\frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{B_{n-1}}{(x-b)^{n-1}} \cdots + \frac{B_1}{x-b} \text{ etc.} \ldots,$$

par

$$\frac{C_p}{(x-c)^p} + \frac{C_{p-1}}{(x-c)^{p-1}} \cdots + \frac{C_1}{x-c} \text{ etc.} \ldots,$$

ce que devient la suite $\frac{A_m}{(x-a)^m} \cdots + \frac{A_1}{x-a}$, quand on y change tour à tour a en b, c, $d \ldots$, m en n, p, q, etc...., les différences

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} - \frac{A_m}{(x-a)^m} \cdots - \frac{A_1}{x-a},$$
$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} - \frac{B_n}{(x-b)^n} \cdots - \frac{B_1}{x-b}, \ \frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} - \frac{C_p}{(x-c)^p} \cdots - \frac{C_1}{x-c},$$

ne deviendront plus infinies, la première pour $x=a$, la deuxième pour $x=b$, etc....; de sorte qu'en posant

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{A_m}{(x-a)^m} \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_n}{(x-b)^n} \cdots + \frac{B_1}{x-b} \cdots + Q,$$

où

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} - \frac{A_m}{(x-a)^m} \ldots - \frac{A_1}{x-a} - \frac{B_n}{(x-b)^n} \ldots - \frac{B_1}{x-b} \ldots = Q,$$

Q ne deviendra infini pour aucune des valeurs $x = a$, $x = b$... D'ailleurs aucune autre valeur de x ne peut rendre la différence du premier membre infinie, Q ne devient donc infini pour aucune valeur de x, ce qui exige que Q soit une fonction entière de x.

Enfin si l'on pose

$$\frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_n}{(x-b)^n} \ldots\ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{c_p}{(x-c)^p} \ldots \text{ etc.} = \frac{R}{\mathrm{f}(x)},$$

R sera aussi une fonction entière de x, car

$$\mathrm{f}(x) = (x-a)^m \times (x-b)^n \ldots,$$

et l'on aura

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{R}{\mathrm{f}(x)} + Q, \quad f(x) = Q\,\mathrm{f}(x) + R.$$

On voit sous cette forme que les deux fonctions entières Q et R, dont la seconde est d'un degré inférieur à celui de $\mathrm{f}(x)$, représenteront évidemment le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $\mathrm{f}(x)$.

51. L'équation

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} = Q + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{B_{n-1}}{(x-b)^{n-1}} \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \text{etc} \ldots$$

renferme le théorème suivant : soit $\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}$ une fraction ra-

tionnelle dans laquelle le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, et a, b, c,... les racines de l'équation $\mathrm{f}(x)=0$; pour décomposer la fraction $\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}$ en fractions simples, il suffira de la développer, 1° suivant les puissances ascendantes de $x-a$, 2° suivant les puissances ascendantes de $x-b$, 3° suivant les puissances ascendantes de $x-c$, etc.; puis d'ajouter au quotient de la division de $f(x)$ par $\mathrm{f}(x)$ la somme des termes qui dans les divers développements deviendront infinis pour $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc.

Dans le cas où le degré de $f(x)$ est inférieur à celui de $\mathrm{f}(x)$, le quotient Q est nul, le reste R est égal à $f(x)$, et l'on a

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}=\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}\ldots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_n}{(x-b)^n}+\ldots$$
$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{C_p}{(x-c)^p}\ldots+\frac{C_1}{x-c}+\text{etc.}\ldots,$$

Dans ce cas, pour décomposer la fraction $\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}$ en fractions simples, il suffira de la développer, 1° suivant les puissances ascendantes de $x-a$, 2° suivant les puissances ascendantes de $x-b$, etc..., puis de faire la somme des termes qui renferment des puissances négatives des différences $x-a$, $x-b$, $x-c$....

52. Quand l'équation $\mathrm{f}(x)=0$ a toutes ses racines inégales, on a

$$m=n=p\ldots=1,\quad \mathrm{f}(x)=\mathrm{N}(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.$$
$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{C_1}{x-c}\ldots+\mathrm{Q}\ldots,$$

de plus, les valeurs des coefficients A_1, B_1, C_1, etc.,...

coïncident avec celles des produits

$$(x-a)\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)},\quad (x-b)\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)},\quad (x-c)\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)},$$

correspondantes à $x=a$, $x=b$, $x=c\ldots$ Toutes ces fractions deviennent $\frac{0}{0}$, mais on obtiendra leurs véritables valeurs en différentiant d'abord haut et bas, ce qui donne

$$\frac{(x-a)f'(x)+f(x)}{\mathrm{f}'(x)},\quad \frac{(x-b)f'(x)+f(x)}{\mathrm{f}'(x)},$$
$$\frac{(x-c)f'(x)+f(x)}{\mathrm{f}'(x)}\ \text{etc.};\ldots$$

et faisant ensuite $x=a$ ou $x=b$, etc.,... on aura ainsi

$$A_1=\frac{f(a)}{\mathrm{f}'(a)},\quad B_1=\frac{f(b)}{\mathrm{f}'(b)},\quad C_1=\frac{f(c)}{\mathrm{f}'(c)}.$$

D'ailleurs l'équation

$$\mathrm{f}(x)=N(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$$

donne

$$\mathrm{f}'(x)=N(x-b)(x-c)\ldots+N(x-a)(x-c)\ldots+\text{etc.},$$
$$\mathrm{f}'(a)=N(a-b)(a-c)\ldots\ \mathrm{f}'(b)=N(b-a)(b-c)\ldots,$$

donc

$$A_1=\frac{f(a)}{N(a-b)(a-c)\ldots},\quad B_1=\frac{f(b)}{N(b-a)(b-c)\ldots}\ \text{etc.}\ldots$$

On aurait pu déduire immédiatement la première de ces valeurs et par suite toutes les autres de l'équation

$$\varphi(x)=\frac{(x-a)f(x)}{\mathrm{f}(x)}=\frac{f(x)}{N(x-b)(x-c)},$$

d'où

$$A_1=\varphi(a)=\frac{f(a)}{N(a-b)(a-c)\ldots},\ B_1=\varphi(b)=\frac{f(b)}{N(b-a)(b-c)\ldots},\ \text{etc.}$$

Cela posé, on aura, si le degré de $f(x)$ est inférieur à

celui de $\mathrm{f}(x)$,

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}=\frac{1}{\mathrm{N}}\left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots}\times\frac{1}{x-a}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots}\times\frac{1}{x-b}+\text{etc.}\ldots\right],$$

$$f(x)=\frac{(x-b)(x-c)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)\ldots}{(b-a)(b-c)\ldots}f(b)+\frac{(x-a)(x-c)\ldots}{(c-a)(c-b)\ldots}f(c)\ldots\ \text{etc.}\ldots$$

Cette formule, connue sous le nom de formule d'interpolation de Lagrange, sert à la détermination d'une fonction entière de x du degré $n-1$, quand on connaît n valeurs particulières de cette fonction $f(a)$, $f(b)$....

Lorsque les fonctions $f(x)$, $\mathrm{f}(x)$ se présentent sous forme réelle, et que les deux racines a, b, sont imaginaires et conjuguées, de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, on a

$$\mathrm{A}_1=\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\mathrm{f}'(\alpha+\beta\sqrt{-1})},\quad \mathrm{B}_1=\frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{\mathrm{f}'(\alpha-\beta\sqrt{-1})};$$

si l'on remarque que pour passer de $f(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ et $\mathrm{f}'(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ à $f(\alpha-\beta\sqrt{-1})$, $\mathrm{f}'(\alpha-\beta\sqrt{-1})$, il suffit de changer $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, et si l'on pose

$$\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\mathrm{f}'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}}{\mathrm{A}'+\mathrm{B}'\sqrt{-1}}=\frac{(\mathrm{AA}'-\mathrm{BB}')+(\mathrm{AB}'+\mathrm{BA}')\sqrt{-1}}{\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2},$$

$$\mathrm{G}=\frac{\mathrm{AA}'-\mathrm{BB}'}{\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2},\quad \mathrm{H}=\frac{\mathrm{AB}'+\mathrm{BA}'}{\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2},$$

on aura

$$\mathrm{A}_1=\frac{(\mathrm{AA}'-\mathrm{BB}')+(\mathrm{AB}'+\mathrm{BA}')\sqrt{-1}}{\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2}=\mathrm{G}+\mathrm{H}\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{B}_1=\frac{(\mathrm{AA}'-\mathrm{BB}')-(\mathrm{AB}'+\mathrm{BA}')\sqrt{-1}}{\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2}=\mathrm{G}-\mathrm{H}\sqrt{-1},$$

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}=\frac{G+H\sqrt{-1}}{x-\alpha-6\sqrt{-1}}+\frac{G-H\sqrt{-1}}{x-\alpha+6\sqrt{-1}}$$
$$=\frac{2G(x-\alpha)-2H6}{(x-\alpha)^2+6^2}.$$

Les deux fractions correspondantes à deux racines imaginaires se réuniront donc pour en former une seule dont le numérateur est une fonction réelle et linéaire de x, et le dénominateur un facteur réel du second degré.

53. On pourrait imaginer diverses méthodes pour arriver à décomposer la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}$ en fractions simples, mais ces diverses méthodes fourniraient nécessairement les mêmes valeurs des coefficients $A_1, A_2, \ldots A_{m-1}$, $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$, etc.... Pour le démontrer, reprenons l'équation

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}=Q+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_n}{(x-b)^n}$$
$$+\frac{B_{n-1}}{(x-b)^{n-1}}\cdots+\frac{B}{x-b}+\text{etc.},$$

et posons

$$Q\,\mathrm{f}(x)+\frac{B_n\mathrm{f}(x)}{(x-b)^n}+\frac{B_{n-1}\mathrm{f}(x)}{(x-b)^{n-1}}+\ldots+\frac{C_p\mathrm{f}(x)}{(x-c)^p}\ldots\text{ etc.}$$
$$=\psi(x)(x-a)^m,$$

$\psi(x)$ sera une fonction entière de x, et nous aurons

$$f(x)=\frac{A_m\mathrm{f}(x)}{(x-a)^m}+\frac{A_{m-1}\mathrm{f}(x)}{(x-a)^{m-1}}\cdots+\frac{A_1\mathrm{f}(x)}{(x-a)}+(x-a)^m\psi(x).$$

Or, si dans cette dernière équation, après avoir posé $x=a+h$, on développe les deux membres suivant les puissances ascendantes de h, on aura, en remarquant que la fonction $\mathrm{f}(x)$ s'évanouit pour $x=a$, ainsi que ses dérivées jusqu'à celle de l'ordre m exclusivement,

$$f(a)+\frac{f'(a)\,h}{1}+\frac{f''(a)\,h^2}{1.2}+\frac{f'''(a)\,h^3}{1.2.3}\ldots\ldots+\frac{f^{(m)}(a)h^m}{1.2\ldots m}$$
$$=(A_m+A_{m-1}h+A_{m-2}h^2\ldots+A_1h^{m-1})$$
$$\left[\frac{\mathrm{f}^{(m)}(a)}{1.2\ldots m}+\frac{\mathrm{f}^{(m+1)}(a)h}{1.2\ldots(m+1)}\ldots+\frac{\mathrm{f}^{(\mu)}(a)h^{\mu-m}}{1.2\ldots\mu}\right]$$
$$+h^m\psi(a+h),$$

μ étant le degré de $\mathrm{f}(x)$, et par suite

$$f(a)=\frac{A_m\mathrm{f}^{(m)}(a)}{1.2\ldots m},\quad f'(a)=\frac{A_{m-1}\mathrm{f}^{(m)}(a)}{1.2\ldots m}+\frac{A_m\mathrm{f}^{(m+1)}(a)}{1.2\ldots(m+1)},$$

d'où

$$A_m=\frac{1.2.3\ldots m\,f(a)}{\mathrm{f}^{(m)}(a)},$$
$$A_{m-1}=\frac{1.2.3\ldots(m+1)f'(a)-A_m\mathrm{f}^{(m+1)}(a)}{(m+1)\,\mathrm{f}^{(m)}(a)},\text{ etc.}\ldots$$

Or il est facile de voir que ces valeurs de A_m, A_{m-1}, etc., sont identiques avec celles que nous avons obtenues par la première méthode.

En effet, A_m était ce que devient $\varphi(x)=\dfrac{(x-a)^m f(x)}{\mathrm{f}(x)}$, quand on y fait $x=a$, or les deux termes de la fraction du second membre s'évanouissant pour $x=0$, ainsi que leurs dérivées jusqu'à celle de l'ordre m exclusivement, la valeur de cette fraction pour $x=a$ ou $\varphi(a)$ sera égale au rapport des valeurs des dérivées $m^{\text{ièmes}}$, rapport qui est

$$\frac{1.2.3\ldots m f(a)}{\mathrm{f}^{(m)}(a)}\quad\text{ou}\quad\frac{f(a)}{(a-b)^n(a-c)^p(a-d)^q\ldots},\quad\text{etc.}$$

On prouverait de la même manière que les valeurs de $A_{m-1},\ldots A_1$, B_n, etc., coïncident avec celles fournies par le premier développement qui a l'avantage de donner les coefficients indépendamment les uns des autres et sous la forme la plus simple.

Exemples :

$$1^{\circ}.\ \mathrm{F}(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)},\ f(x)=1,\ f'(x)=0,$$

$$\mathrm{f}(x)=(x-1)^2(x+1),\ a=1,\ m=2,\ b=-1,\ n=1,$$

$$\mathrm{f}'(x)=2(x-1)(x+1)+(x-1)^2,$$

$$\mathrm{f}''(x)=2(x-1)+2(x+1)+2(x-1)$$
$$=4(x-1)+2(x+1),$$

$$\varphi(x)=(x-1)^2\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}=\frac{1}{x+1},\quad \varphi'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$\mathrm{A}_2=\varphi(a)=\tfrac{1}{2},$$

$$\mathrm{A}_1=\varphi'(a)=-\tfrac{1}{4},\quad \mathrm{B}_1=\varphi_1(b)=\tfrac{1}{4};$$

d'où

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{\mathrm{A}_2}{(x-1)^2}+\frac{\mathrm{A}_1}{x-1}+\frac{\mathrm{B}_1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)};$$

$$2^{\circ}.\ \frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{\mathrm{A}_1}{(x-1)}+\frac{\mathrm{B}_1}{(x+1)},$$

$$\mathrm{f}(x)=x^2-1,\quad \mathrm{f}'(x)=2x,$$

$$\mathrm{A}_1=\frac{f(1)}{\mathrm{f}'(1)}=\frac{1}{2},\quad \mathrm{B}_1=\frac{f(-1)}{\mathrm{f}'(-1)}=-\frac{1}{2},$$

d'où

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}.$$

$3^{\circ}.\ \dfrac{f(x)}{\mathrm{f}(x)}=\dfrac{x^m}{x^n-1}$, m étant plus petit que n. On a

$$f(x)=x^m,\quad \mathrm{f}(x)=x^n-1,\quad \mathrm{f}'(x)=nx^{n-1}.$$

Toutes les racines a, b, c, etc., de l'équation

$x^n - 1 = 0$, ou $x^n = 1$, sont inégales et comprises dans la formule

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n},$$

k représentant un nombre entier égal ou inférieur à $\frac{n}{2}$: de plus, pour chacune de ces racines on aura

$$x^n = 1, \quad \frac{f(x)}{\mathrm{f}'(x)} = \frac{x^m}{nx^{n-1}} = \frac{x^{m+1}}{nx^n} = \frac{x^{m+1}}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\left[\cos \frac{2k(m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k(m+1)\pi}{n}\right].$$

On obtiendra la valeur des coefficients A_1, B_1, C_1,... etc., en donnant tour à tour à k, dans cette équation, toutes les valeurs depuis $k = 0$ jusqu'à $k = \frac{n}{2}$, puis on les substituera dans l'équation

$$\frac{f(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} \ldots + \text{etc.},$$

en réduisant au même dénominateur les fractions imaginaires conjuguées, etc.



DOUZIÈME LEÇON.

Suite des applications analytiques.

SIXIÈME APPLICATION. *Conséquences de quelques-unes des formules précédemment obtenues.*

54. Reprenons les séries

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots \text{etc.},$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \text{etc.}$$

Ces séries, comme nous l'avons vu, subsistent quelle que soit la valeur réelle où imaginaire attribuée à la variable x; on peut donc les étendre à tous les cas possibles, et les considérer comme pouvant servir à fixer le sens des trois notations

$$e^x,\ \cos x,\ \sin x.$$

En changeant, dans la première de ces équations, x en $x\text{l}a$, on aura pour définir l'expression a^x,

$$e^{x\text{l}a} = a^x = 1 + \frac{x\text{l}a}{1} + \frac{x^2}{1.2}\,\text{l}a^2 + \frac{x^3}{1.2.3}\,\text{l}a^3 + \dots \text{etc.}:$$

si l'on y change x en $x\sqrt{-1}$, ou en $-x\sqrt{-1}$, on trouvera

$$c^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} + \dots = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$- \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} \ldots = \cos x - \sqrt{-1}\sin x;$$

on a donc

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}},\ \cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-x\sqrt{-1}},$$

on aura de même

$$\cos y + \sqrt{-1}\sin y = e^{y\sqrt{-1}},$$

d'où

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = e^{(x+y)\sqrt{-1}}$$
$$= \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x;$$

on aura encore

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)\ldots$$
$$= e^{(x+y+z\ldots)\sqrt{-1}} = \cos(x+y+z\ldots) + \sqrt{-1}\sin(x+y+z\ldots),$$

d'où l'on tirera en faisant $y = z \ldots = x$,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx.$$

Cette dernière formule fut donnée d'abord par Moivre, dont elle a retenu le nom.

La multiplication d'expressions de la forme

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

se réduit donc à une addition, et l'élévation aux puissances à une multiplication. Ce résultat est très important, puisque, comme on le verra, toute expression imaginaire $\alpha + 6\sqrt{-1}$ peut se mettre sous la forme

$$r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

On aura encore

$$\frac{1}{\cos x+\sqrt{-1}\sin x}=\frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}}=e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\sin x,$$

$$\frac{1}{(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^m}=\frac{1}{e^{mx\sqrt{-1}}}=\cos mx-\sqrt{-1}\sin mx.$$

Ainsi pour diviser par $(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^m$, il suffit de multiplier par $\cos mx-\sqrt{-1}\sin mx$.

55. En partant des mêmes principes, il sera facile de fixer le sens des notations

$$x^a,\quad A^x,\quad Lx,\quad \sin x,\quad \cos x,$$

dans le cas où la variable x devient imaginaire.

Nous avons dit que toute expression imaginaire $\alpha+6\sqrt{-1}$ pouvait se mettre sous la forme

$$r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t);$$

il suffit pour cela de prendre

$$r=\sqrt{\alpha^2+6^2},\quad \cos t=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+6^2}},$$

$$\sin t=\frac{6}{\sqrt{\alpha^2+6^2}},\quad t=\text{arc tang}\frac{6}{\alpha}.$$

Si l'on désigne par τ la plus petite valeur absolue de l'arc qui a $\frac{6}{\alpha}$ pour tangente, cet arc sera compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$; $\cos\tau$ sera essentiellement positif, et si l'on suppose α positif, on aura

$$\cos\tau=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+6^2}},\quad \sin\tau=\frac{6}{\sqrt{\alpha^2+6^2}},$$

$$\cos t=\cos\tau,\quad \sin t=\sin\tau.$$

La valeur générale de t sera

$$t = \tau \pm 2k\pi, \quad \text{et} \quad x = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\,\sin\tau);$$

si au contraire α est négatif, on trouvera

$$\cos\tau = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+6^2}}, \quad \sin\tau = -\frac{6}{\sqrt{\alpha^2+6^2}},$$
$$\cos t = -\cos\tau, \quad \sin t = -\sin\tau,$$
$$t = \tau \pm (2k+1)\pi, \quad x = -r(\cos\tau + \sqrt{-1}\,\sin\tau).$$

Cela posé, 1° si a est un nombre entier m, on aura

$$x^a = x^m = r^m(\cos t + \sqrt{-1}\,\sin t)^m,$$

équation qui entraîne, comme nous l'avons vu, la suivante,

$$x^m = r^m(\cos mt + \sqrt{-1}\,\sin mt);$$

2°. Si a est une fraction $\frac{1}{n}$, $x^a = x^{\frac{1}{n}}$ aura un certain nombre de valeurs, en désignant par $((x))^{\frac{1}{n}}$ l'ensemble de ces valeurs, par $((1))^{\frac{1}{n}}$, $((-1))^{\frac{1}{n}}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $+1$ ou -1, on aura, si $\alpha > 0$, $x = r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$,

$$((x))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\tau}{n}\right)((1))^{\frac{1}{n}};$$

si $\alpha < 0$, $x = -r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau)$,

$$((x))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\tau}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{\tau}{n}\right)((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

56. Quant aux valeurs générales de $((1))^{\frac{1}{n}}$, $((-1))^{\frac{1}{n}}$, on les obtiendra en cherchant les valeurs de

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\,\sin t)$$

propres à vérifier les équations

$$x^n = r^n(\cos nt + \sqrt{-1}\,\sin nt) = 1,$$
$$x^n = r^n(\cos nt + \sqrt{-1}\,\sin nt) = -1;$$

or on satisfera à la première en posant

$$r = 1,\quad \cos nt = 1,\quad \sin nt = 0,\quad nt = \pm\, 2k\pi,\quad t = \pm\frac{2k\pi}{n};$$

et à la seconde, en posant

$$r = 1,\quad \cos nt = 1,\quad \sin nt = 0,\quad nt = \pm(2k+1)\pi,$$
$$t = \pm\frac{2k+1}{n}\pi:$$

on aura donc

$$((1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n},$$
$$((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k+1}{n}\pi.$$

Ces équations fournissent pour chacune des expressions $((1))^{\frac{1}{n}}$, $((-1))^{\frac{1}{n}}$, n valeurs distinctes que l'on obtiendra en donnant tour à tour pour valeur à $2k$ tous les nombres pairs, à $2k+1$ tous les nombres impairs compris entre 0 et n inclusivement. Il est facile de démontrer qu'il suffit de donner à $2k$ ou à $2k+1$ ces deux séries de valeurs. En effet, 1° soit ν le nombre entier le plus rapproché du rapport $\frac{k}{n}$, la différence entre les deux nombres ν et $\frac{k}{n}$ sera tout au plus égale à $\frac{1}{2}$, en sorte qu'on aura $\frac{k}{n} = \nu \pm \frac{k'}{n}$, $\frac{k'}{n}$ désignant une fraction égale ou inférieure à $\frac{1}{2}$, et par suite k' un nombre entier infé-

rieur ou tout au plus égal à $\frac{n}{2}$; on en conclura

$$\frac{2k\pi}{n} = 2\nu\pi \pm \frac{2k'\pi}{n},$$

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2k'\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k'\pi}{n},$$

et par conséquent toutes les valeurs de $((1))^{\frac{1}{n}}$ seront comprises dans la formule

$$\cos\frac{2k'\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k'\pi}{n},$$

si l'on suppose $2k'$ renfermée entre les limites 0 et n; ou, ce qui revient au même, dans la formule

$$((1))^{\frac{1}{n}} = \frac{\cos 2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n},$$

si l'on y suppose $2k$ renfermé entre les mêmes limites.

Soit de même ν le nombre entier le plus rapproché du rapport $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$; la différence $\frac{2n\nu-(2k+1)}{2n}$ entre les nombres ν et $\frac{2k+1}{2n}$, est évidemment une fraction de numérateur impair inférieure ou tout au plus égale à $\frac{1}{2}$, en sorte qu'on aura

$$\frac{2k+1}{2n} = \nu \pm \frac{2k'+1}{2n},$$

$2k'+1$ désignant un nombre impair égal ou inférieur à n, on en conclura

$$\frac{(2k+1)\pi}{n} = 2\nu\pi \pm \frac{(2k'+1)\pi}{n},$$

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$
$$=\cos\frac{(2k'+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2k'+1)\pi}{n},$$

et par conséquent toutes les valeurs de $((-1))^{\frac{1}{n}}$ seront comprises dans la formule

$$\cos\frac{(2k'+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2k'+1)\pi}{n},$$

si l'on suppose $2k'+1$ renfermé entre les limites 0 et n, ou, ce qui revient au même, dans la formule

$$((-1))^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

si l'on y suppose $2k+1$ renfermé entre les mêmes limites.

Si n est pair, $2k$ pourra être tour à tour égalé à $0, 2, 4, \ldots (n-2), n$, les valeurs 0 et n donneront pour $((1))^{\frac{1}{n}}$ deux racines réelles $+1$ et -1, chacune des autres valeurs en nombre $\frac{n-2}{2}$ donnera deux valeurs imaginaires conjuguées. Dans le même cas, $2k+1$ pourra recevoir les valeurs $1, 3, 5, \ldots (n-1)$; à chacune de ces valeurs en nombre $\frac{n}{2}$ correspondront deux valeurs imaginaires de l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$.

Si au contraire n est impair, $2k$ pourra recevoir toutes les valeurs $0, 2, 4, \ldots (n-1)$; à la première correspondra une racine réelle et unique $+1$, et chacune des autres, en nombre $\frac{n-1}{2}$, fournira deux valeurs

imaginaires conjuguées de l'expression $((1))^{\frac{1}{n}}$. Alors aussi $2k+1$ pourra recevoir les valeurs $1, 3, 5, \ldots n-2, n$; à la dernière correspondra une racine unique et réelle -1 de l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$; chacune des autres, en nombre $\frac{n-1}{2}$, donnera deux valeurs imaginaires conjuguées.

De ce que les expressions $((1))^{\frac{1}{n}}$, $((-1))^{\frac{1}{n}}$ ont n valeurs, on conclut qu'il en est de même de l'expression $((x))^{\frac{1}{n}}$.

57. Revenons à l'expression x^a. 3°. Quand a est un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$, on trouve, si $\alpha > 0$,

$$x^a = ((x))^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \left(\cos\frac{m}{n}\tau + \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)((1))^{\frac{m}{n}};$$

si $\alpha < 0$,

$$x^a = ((x))^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \left(\cos\frac{m}{n}\tau + \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\tau\right)((-1))^{\frac{m}{n}}.$$

Les diverses valeurs des expressions $((1))^{\frac{m}{n}}$, $((-1))^{\frac{m}{n}}$ seront données par les équations

$$((1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2km\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2km\pi}{n},$$

$$((-1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)m\pi}{n}.$$

Comme les seconds membres de ces équations élevés à la puissance n, donnent pour résultats $+1$ ou -1, on en con-

clut que toutes les valeurs de $((1))^{\frac{m}{n}}$ ou $((-1))^{\frac{m}{n}}$ coïncident avec celles de $((1))^{\frac{1}{n}}$ ou $((-1))^{\frac{1}{n}}$.

4°. Si $a = -m$, on aura

$$x^{-m} = r^{-m} (\cos mt - \sqrt{-1} \sin mt);$$

5°. Quand $a = -\frac{m}{n}$, on a, si $\alpha > 0$,

$$((x))^{-\frac{m}{n}} = r^{-\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m}{n} \tau - \sqrt{-1} \sin \frac{m}{n} \tau\right) ((1))^{-\frac{m}{n}};$$

si $\alpha < 0$,

$$((x))^{-\frac{m}{n}} = r^{-\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m}{n} \tau - \sqrt{-1} \sin \frac{m}{n} \tau\right) ((-1))^{-\frac{m}{n}},$$

et l'on reconnaîtra que les diverses valeurs des expressions $((1))^{\frac{m}{n}}$, $((-1))^{-\frac{m}{n}}$, coïncident encore avec les diverses valeurs des expressions $((1))^n$ et $((-1))^n$.

En résumé, a étant une quantité quelconque positive, négative, entière, fractionnaire, et x une quantité imaginaire $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, on aura, si $\alpha > 0$,

$$((x))^a = r^a (\cos a\tau + \sqrt{-1} \sin a\tau) ((1))^a;$$

si $\alpha < 0$,

$$((x))^a = r^a (\cos a\tau + \sqrt{-1} \sin a\tau) ((-1))^a;$$
$$((1))^a = \cos 2ka\pi + \sqrt{-1} \sin 2ka\pi,$$
$$((-1))^a = \cos (2k+1)a\pi + \sqrt{-1} \sin (2k+1)a\pi.$$

On désigne par la notation particulière x^a, celle des valeurs que l'on obtient quand, α étant positif, on prend

pour $((1))^a$ la valeur particulière 1; on a ainsi

$$x^a = r^a(\cos a\tau + \sqrt{-1}\sin a\tau).$$

On convient d'étendre cette équation au cas même où a devient irrationnel, et de s'en servir pour fixer le sens de la notation x^a.

58. Considérons maintenant les notations A^x, $\sin x$, $\cos x$, $L(x)$. On a, comme nous l'avons vu,

$$a^x = e^{x\,l\,a}, \quad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x.$$

Si $x = \alpha + 6\sqrt{-1}$, on aura

$$e^x = e^{\alpha + 6\sqrt{-1}} = e^{\alpha} e^{6\sqrt{-1}} = e^{\alpha}(\cos 6 + \sqrt{-1}\sin 6);$$

donc

$$a^x = a^{\alpha + 6\sqrt{-1}} = e^{(\alpha + 6\sqrt{-1})\,l\,a} = e^{\alpha\,l\,a}(\cos 6\,l\,a + \sqrt{-1}\sin 6\,l\,a)$$
$$= a^{\alpha}(\cos 6\,l\,a + \sqrt{-1}\sin 6\,l\,a).$$

Les équations

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

donnent

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

on aura dès lors, dans le cas où $x = \alpha + 6\sqrt{-1}$,

$$\cos x = \frac{e^{6} + e^{-6}}{2}\cos\alpha - \frac{e^{6} - e^{-6}}{2}\sin\alpha\sqrt{-1},$$
$$\sin x = \frac{e^{6} + e^{-6}}{2}\sin\alpha + \frac{e^{6} - e^{-6}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1}.$$

59. Si l'on cherche les diverses valeurs réelles ou ima-

ginaires de y ou de z, propres à résoudre les deux équations

$$e^y = x, \quad a^z = x,$$

ces diverses valeurs seront les logarithmes de x, calculés dans le système népérien et dans le système dont la base est a; nous les désignerons par les notations $\mathrm{l}((x))$, $\mathrm{L}((x))$.

Or l'équation $a^z = e^{z\mathrm{l}a}$ entraîne la suivante,

$$e^y = e^{z\mathrm{l}a}, \quad y = z\mathrm{l}a, \quad z = \frac{y}{\mathrm{l}a},$$

on aura donc toujours $\mathrm{L}((x)) = \dfrac{\mathrm{l}((x))}{\mathrm{l}a}$, de sorte que pour obtenir les logarithmes de x, dans le système dont la base est a, il suffit de diviser par $\mathrm{l}\,a$ les logarithmes népériens de la même variable.

Posons

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = p + q\sqrt{-1},$$

l'équation $e^y = x$ donne

$$e^{p+q\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

et si $\alpha > 0$,

$$e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q) = r(\sin\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

$$e^p = r, \quad p = \mathrm{l}r, \quad \cos q = \cos\tau, \quad \sin q = \sin\tau, \quad q = \tau \pm 2k\pi;$$

si $\alpha < 0$,

$$e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q) = -r(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau),$$

$$e^p = r, \; p = \mathrm{l}r, \; \cos q = -\cos\tau, \; \sin q = -\sin\tau, \; q = \tau \pm (2k+1)\pi.$$

On aura donc, si $\alpha > 0$,

$$\mathrm{l}((x)) = \mathrm{l}r + \tau\sqrt{-1} \pm 2k\pi\sqrt{-1};$$

si $\alpha < 0$,

$$\mathrm{l}((x)) = \mathrm{l}r + \tau\sqrt{-1} \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Si l'on fait

$$x = 1, \quad \text{ou} \quad x = -1, \quad \text{d'où} \quad r = 1 \quad \text{et} \quad \tau = 0,$$

on aura

$$l((1)) = \pm 2k\pi\sqrt{-1}, \quad l((-1)) = \pm(2k+1)\pi\sqrt{-1};$$

1 et -1 ont donc une infinité de logarithmes, et l'on aura, si $\alpha > 0$,

$$l((x)) = lr + \tau\sqrt{-1} + l((1));$$

si $\alpha < 0$,

$$l((x)) = lr + \tau\sqrt{-1} + l((-1)).$$

Dans le cas où α est positif, il existe un logarithme plus simple que les autres, celui que l'on obtient en faisant $k = 0$, où, en prenant $+1$ pour $l((1))$, on désigne ce logarithme particulier par la notation lx, et l'on a

$$lx = lr + \tau\sqrt{-1}.$$

On déduit la valeur de $L((x))$ de celle de $l((x))$, en divisant cette dernière par la.

On détermine de la même manière le sens des notations arc sin $((x))$, arc cos $((x))$, dans le cas où x a une valeur imaginaire $\alpha + 6\sqrt{-1}$. S'agit-il, par exemple, de arc sin$((x))$, on posera

$$\text{arc}\sin((x)) = p + q\sqrt{-1};$$

d'où

$$x = \alpha + 6\sqrt{-1} = \sin\left(p + q\sqrt{-1}\right)$$

$$= \frac{e^q + e^{-q}}{2}\sin p + \frac{e^q - e^{-q}}{2}\cos p\sqrt{-1}.$$

De cette dernière équation, on tirera les valeurs de p et de

q, que l'on substituera dans l'équation

$$\arcsin((x)) = p + q\sqrt{-1}.$$

(*Voyez*, pour plus de détails, l'*Analyse algébrique* de M. Cauchy, chapitre IX, ou le *Traité de Calcul différentiel* du même auteur, onzième leçon.)

60. Nous mettrons fin à cette digression en étendant à des valeurs imaginaires quelconques des variables x ou y, les formules connues

$$((x))^a \times ((x))^b = ((x))^{a+b},$$
$$e^x e^y = e^{x+y},$$
$$a^x a^y = a^{x+y},$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\mathrm{L}((xy)) = \mathrm{L}((x)) + \mathrm{L}((y));$$

1°. $$((x))^a = r^a(\cos a\tau + \sqrt{-1}\sin a\tau)((\pm 1))^a,$$
$$((x))^b = r^b(\cos b\tau + \sqrt{-1}\sin b\tau)((\pm 1))^b,$$

donc $$((x))^a\,((x))^b$$
$$= r^{a+b}\cos[(a+b)\tau + \sqrt{-1}\sin(a+b)\tau]((\pm 1))^{a+b} = ((x))^{a+b};$$

2°. $$e^x = e^{\alpha+6\sqrt{-1}} = e^\alpha(\cos 6 + \sqrt{-1}\sin 6),$$
$$e^y = e^{\alpha'}(\cos 6' + \sqrt{-1}\sin 6'),$$
$$e^x e^y = e^\alpha e^{\alpha'}[\cos(6+6') + \sqrt{-1}\sin(6+6')]$$
$$= e^{\alpha'+\alpha'} e^{(6+6')\sqrt{-1}} = e^{\alpha+6\sqrt{-1}+\alpha'+6'\sqrt{-1}} = e^{x+y};$$

3°. $$a^x a^y = e^{x\mathrm{l}a} + e^{y\mathrm{l}a} = e^{(x+y)\mathrm{l}a} = a^{x+y};$$

4°. $$\cos x = \cos(\alpha + 6\sqrt{-1}) = \frac{e^6 + e^{-6}}{2}\cos\alpha$$
$$- \frac{e^6 - e^{-6}}{2}\sin\alpha\sqrt{-1},$$

$$\cos y = \cos(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = \frac{e^{\beta'} + e^{-\beta'}}{2}\cos\alpha'$$
$$- \frac{e^{\beta'} - e^{-\beta'}}{2}\sin\alpha'\sqrt{-1},$$

$$\cos(x+y) = \cos[(\alpha+\alpha') + (\beta+\beta')\sqrt{-1}]$$
$$= \frac{e^{\beta+\beta'} + e^{-\beta-\beta'}}{2}\cos(\alpha+\alpha') - \frac{e^{\beta+\beta'} - e^{-\beta-\beta'}}{2}\sin(\alpha+\alpha')\sqrt{-1}$$
$$= \frac{e^{\beta+\beta'} + e^{-\beta-\beta'}}{2}(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha')$$
$$+ \frac{e^{\beta+\beta'} - e^{-\beta-\beta'}}{2}(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha)\sqrt{-1}$$
$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

On trouverait de la même manière,

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x,$$

et par suite,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \text{ etc.}$$

5°. On a identiquement

$$x = e^{\mathrm{l}((x))}, \quad y = e^{\mathrm{l}((y))}, \quad xy = e^{\mathrm{l}((xy))};$$

d'où

$$xy = e^{\mathrm{l}((xy))} = e^{\mathrm{l}((x)) + \mathrm{l}((y))}, \quad e^{\mathrm{l}((x)) + \mathrm{l}((y)) - \mathrm{l}((xy))} = 1,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'exposant du premier membre sera de la forme $\pm 2k\pi\sqrt{-1}$, on aura donc définitivement

$$\mathrm{l}((x)) + \mathrm{l}((y)) - \mathrm{l}((xy)) = \pm 2k\pi\sqrt{-1},$$
$$\mathrm{l}((xy)) = \mathrm{l}((x)) + \mathrm{l}((y)) \pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

ou plus simplement

$$\mathrm{l}((xy)) = \mathrm{l}((x)) + \mathrm{l}((y));$$

car on ne change rien au logarithme d'une quantité ima-

ginaire, quand on y ajoute $\pm 2k\pi\sqrt{-1}$, qui y est déjà compris, puisque $\mathrm{l}((x))$ est égal à la somme $\mathrm{l}((x))+\tau\sqrt{-1}$ augmentée de $\pm 2k\pi\sqrt{-1}$, ou de $\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}$.

Nota. Les équations

$$((x))^a\,((x))^b=((x))^{a+b},\quad \mathrm{l}((x))+\mathrm{l}((y))=\mathrm{l}((xy)),$$

sont vraies dans ce sens seulement, qu'à chaque valeur du premier membre, on pourra faire correspondre une valeur égale du deuxième.

61. On peut enfin appliquer les principes établis ci-dessus à la résolution des deux problèmes suivants :

Problème 1er. Transformer $\sin mx$ et $\cos mx$ en un polynome ordonné suivant les puissances ascendantes de $\sin x$ et $\cos x$.

Solution. Les deux équations

$$(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^m=\cos mx+\sqrt{-1}\sin mx,$$
$$(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)^m=\cos mx-\sqrt{-1}\sin mx,$$

donnent

$$\cos mx=\frac{(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^m+(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)^m}{2},$$

$$\sin mx=\frac{(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^m-(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)^m}{2\sqrt{-1}}.$$

Si après avoir effectué les développements, on égale de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, on trouve

$$\cos mx=\cos^m x-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}x\sin^2 x$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}x\sin^4 x+\ldots\text{etc.},$$

$$\sin mx=\frac{m}{1}\cos^{m-1}x\sin x-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x+\ldots\text{etc.}$$

Exemples :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x, \quad \sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x.$$

Si dans le développement de cos mx, ou de sin mx, on met à la place de $\cos^2 x$ sa valeur $1 - \sin^2 x$, on trouvera, en développant, 1° si m est pair,

$$\cos mx = 1 - \frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin^2 x$$
$$+ \frac{m}{1}\,\frac{m-2}{3}\left[\frac{(m-1)(m-3)}{2.4} + \frac{(m-1)}{2}\,\frac{3}{2} + \frac{3}{2}.\frac{1}{4}\right]\sin^4 x - \ldots,$$

$$\sin mx = \cos x \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m-2)}{1.3}\left[\frac{(m-1)}{2} + \frac{3}{2}\right]\sin^3 x \\ + \frac{m(m-2)(m-4)}{1.3.5}\left[\frac{(m-1)(m-3)}{2.4} + \frac{(m-1)}{2}\,\frac{5}{2} + \frac{5}{2}.\frac{3}{4}\right]\sin^5 x \ldots \end{array} \right\},$$

2°. Si m est impair,

$$\cos mx = \cos x \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{(m-1)}{1}\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin^2 x \\ + \frac{(m-1)(m-3)}{1.3}\left[\frac{m(m-2)}{2.4} + \frac{m}{2}.\frac{3}{2} + \frac{3}{2}.\frac{1}{4}\right]\sin^4 x \ldots \end{array} \right\},$$

$$\sin mx = \frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m-1)}{1.3}\left(\frac{m-2}{2} + \frac{3}{2}\right)\sin^3 x$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-3)}{1.3.5}\left[\frac{(m-2).(m-4)}{2.4} + \frac{(m-2)}{2}.\frac{5}{2} + \frac{5}{2}.\frac{3}{4}\right]\sin^5 x \ldots$$

Si dans ces équations on change x en $\frac{\pi}{2} - x$, et si l'on observe que l'on a, pour des valeurs paires de m,

$$\cos\left(m\frac{\pi}{2} - mx\right) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx,$$

$$\sin\left(m\frac{\pi}{2} - mx\right) = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \sin mx,$$

et pour des valeurs impaires de m,

$$\cos\left(m\frac{\pi}{2} - mx\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin mx,$$

$$\sin\left(m\frac{\pi}{2} - mx\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos mx;$$

on trouvera les développements de $\sin mx$ et $\cos mx$, suivant les puissances ascendantes de $\cos x$.

2[me] *Problème.* Exprimer les puissances entières de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonctions linéaires des sinus et des cosinus des arcs multiples $2x$, $3x$, etc.

Posons

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = u, \quad \cos x - \sqrt{-1}\sin x = v,$$

d'où

$$2\cos x = u + v, \quad 2\sqrt{-1}\sin x = u - v, \quad uv = 1,$$

$$\frac{u^n + v^n}{2} = \cos nx, \quad \frac{u^n - v^n}{2\sqrt{-1}} = \sin nx.$$

Cela posé, on aura

$$2^m \cos^m x = (u+v)^m = u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 + \ldots + muv^{m-1} + v^m,$$

$$2^m \sin^m x(\sqrt{-1})^m = (u-v)^m = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 - \ldots \pm v^m,$$

et si m est pair,

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}},$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1}\sin^m x = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x \ldots$$
$$\pm \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}};$$

si au contraire m est impair, on aura

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+1}{2}}{1\ 2.3\ldots\frac{m-1}{2}}\cos x,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1}\sin^m x = \sin mx - \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x \ldots$$
$$\pm \frac{m.(m-1)\ldots\frac{m+1}{2}}{1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}}\sin x.$$



TREIZIÈME LEÇON.

Différentielles des fonctions explicites ou implicites de plusieurs variables indépendantes.

62. Soit $u = F(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x, y; donnons à ces deux variables des accroissements simultanés Δx, Δy, l'accroissement Δu de la fonction sera donné par l'équation

$$\Delta u = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y) = F(x+\Delta x, y) - F(x, y) + F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y);$$

mais d'après un théorème souvent rappelé, nous aurons, en désignant par $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$, les dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$, prises par rapport à x ou par rapport à y, par $F''_{xy}(x, y)$, la dérivée par rapport à x de la dérivée prise d'abord par rapport à y, et par ε_1, ε_2, ε_3, des quantités qui s'évanouissent avec Δx, Δy,

$$F(x+\Delta x, y) - F(x, y) = F'_x(x, y)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x,$$
$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) = F'_y(x+\Delta x, y)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y,$$
$$F'_y(x+\Delta x, y) = F'_y(x, y) + F''_{xy}(x, y)\Delta x + \varepsilon_3 \Delta x;$$

on a donc, en remarquant que

$$F'_x(x, y) = \frac{du}{dx}, \quad F'_y(x, y) = \frac{du}{dy}, \quad F''_{xy}(x, y) = \frac{d^2u}{dxdy},$$

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \frac{d^2u}{dxdy}\Delta x \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x \Delta y.$$

L'accroissement Δu se compose donc encore ici de deux

parties; l'une proportionnelle aux premières puissances de Δx, Δy, ou dans laquelle les coefficients de Δx, Δy ne s'évanouissent pas avec ces accroissements; l'autre nécessairement proportionnelle à des puissances supérieures, et à des produits de ces accroissements, ou dans laquelle les coefficients ε_1, ε_2, ε_3 des accroissements, s'évanouissent avec eux. Dès lors il paraît tout-à-fait naturel, par analogie, d'appeler différentielle de u, et de représenter par du, lorsque u est une fonction de deux variables indépendantes x, y, la partie de l'accroissement Δu qui est proportionnelle aux premières puissances des accroissements $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$; on obtient ainsi

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy:$$

la différentielle d'une semblable fonction est donc égale à la somme de ses différentielles partielles prises tour à tour par rapport à chacune des variables indépendantes.

Si nous avions eu $u = F(x, y, z)$, nous aurions trouvé de la même manière, en désignant encore par ε_1, ε_2, etc., ε', ε'', etc., des quantités qui s'évanouissent avec Δx, Δy, Δz, par k, k', k'', des coefficients déterminés,

$$\Delta u = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y, z) = F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z) + F(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - F(x+\Delta x, y, z) + F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y+\Delta y, z);$$

$$F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z) = F'_x(x, y, z)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x,$$

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - F(x+\Delta x, y, z) = F'_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$F'_y(x+\Delta x, y, z) = F'_y(x, y, z) + F''_{xy}(x, y, z)\Delta x + \varepsilon_3 \Delta x,$$

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y+\Delta y, z) = F'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\Delta z + \varepsilon_4 \Delta z,$$

$$F'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z) = F'_z(x+\Delta x, y, z) + F''_{yz}(x+\Delta x, y, z)\Delta y + \varepsilon_5 \Delta y,$$

$$F'_z(x+\Delta x, y, z) = F'_z(x, y, z) + F''_{xz}(x, y, z)\,\Delta x + \varepsilon_6 \Delta x,$$

$$\Delta u = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \varepsilon'\Delta x + \varepsilon''\Delta y + \varepsilon'''\Delta z$$
$$+ k\Delta y\Delta x + k'\Delta z\Delta x + k''\Delta y\Delta z,$$

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

équation que l'on écrirait plus correctement de la manière suivante

$$du = d_x u + d_y u + d_z u.$$

La marche que nous venons de suivre est indépendante, on le voit, du nombre des variables, et dès lors nous pouvons énoncer le théorème suivant: en appelant différentielle d'une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes, la partie de l'accroissement Δu qui est proportionnelle aux premières puissances des accroissements Δx, Δy, Δz; cette différentielle du sera toujours égale à la somme des différentielles partielles de la fonction u, prises tour à tour par rapport à chacune des variables indépendantes comme si les autres étaient constantes.

Remarque. Dans le cas où x, étant seule variable indépendante, u se trouvait déterminé par les équations

$$u = F(x, y, z), \quad y = \varphi(x), \quad z = \chi(x);$$

nous avons trouvé aussi

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

Cette dernière équation a donc lieu et dans le cas où une seule des trois variables est indépendante, et dans le cas où elles le sont toutes trois. Mais dans ce dernier cas, dx, dy, dz désignent les accroissements arbitraires attri-

bués aux variables indépendantes, tandis que dans le premier cas dx seul exprime l'accroissement de la variable indépendante x; dy, dz désignent les différentielles de y et de z, considérées comme fonctions de x, et déduites des équations $y=\varphi(x)$, $z=\chi(x)$. Une autre différence, encore plus digne d'attention, consiste en ce que, dans le dernier cas, l'équation

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz,$$

ne doit être considérée que comme exprimant la définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables indépendantes; tandis que dans le premier, la même équation est le résultat d'un théorème qu'il est nécessaire de démontrer; car la différentielle du se trouve alors définie *à priori*, comme la limite du produit $dx.\lim.\frac{\Delta u}{\Delta x}$, ou comme la différentielle de la fonction $F[x,\varphi(x),\chi(x)]$, que l'on obtiendrait en substituant à y et z dans $u=F(x,y,z)$, leurs valeurs $y=\varphi(x)$, $z=\chi(x)$.

Si les trois variables x, y, z étaient liées entre elles par une équation

$$\psi(x,y,z)=0,\quad \text{ou}\quad z=\psi(x,y),$$

deux seulement seraient variables indépendantes, et en éliminant z, on aurait

$$u=F[x,y,\psi(x,y)]=F_1(x,y),$$

la différentielle du se composerait de deux parties : l'une prise par rapport à x en regardant y comme constant, l'autre prise par rapport à y, en considérant x comme constant. Dans le premier cas, l'équation

$$u=F(x,y,z)$$

peut se mettre sous la forme $u = f(x, z)$, z étant une fonction de x; dans le second, sous la forme $u = \mathrm{f}(y, z)$, z étant une fonction de y, et l'on a

$$d_y u = \frac{d_y u}{dy} dy + \frac{d_z u}{dz} \frac{dz}{dy} dy,$$
$$d_x u = \frac{d_x u}{dx} dx + \frac{d_z u}{dz} \frac{dz}{dx} dx,$$
$$du = d_x u + d_y u = \frac{d_x u}{dx} dx + \frac{d_y u}{dy} dy + \frac{d_z u}{dz}\left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy\right);$$

mais z est une fonction des deux variables indépendantes x, y, et par conséquent

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy;$$

donc enfin

$$du = \frac{d_x u}{dx} dx + \frac{d_y u}{dy} dy + \frac{d_z u}{dz} dz,$$

ou

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz,$$
$$du = d_x u + d_y u + d_z u.$$

Telle est donc, dans tous les cas, la forme que prend la différentielle d'une fonction explicite de plusieurs variables dépendantes ou indépendantes.

63. Pour obtenir avec facilité la différentielle d'une fonction implicite de plusieurs variables indépendantes, il suffit d'observer, 1° que si deux fonctions d'un nombre quelconque de variables sont égales identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, leurs différentielles partielles, et par suite leurs différentielles totales seront aussi identiquement égales; 2° que si une fonction de plusieurs variables est nulle identiquement, sa différentielle totale sera nulle aussi. L'équation $u = \mathrm{F}(x, y, z\ldots \text{ etc.}) = 0$, entraîne donc les

suivantes

$$\Delta u = 0, \quad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots \text{ etc.} = 0.$$

A l'aide de cette dernière équation on pourra déterminer la différentielle de l'une des variables considérée comme fonction implicite de toutes les autres. Si, par exemple, il n'y a que trois variables, on trouvera

$$dz = -\frac{\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy}{\frac{du}{dz}}.$$

Exemple :

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad xdx + ydy + zdz = 0,$$

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy.$$

Si les variables $x, y, z, \ldots$ au lieu d'être assujéties à une seule équation de la forme $u = 0$, étaient liées par deux équations de cette espèce $u = 0$, $v = 0$, on aurait en même temps les deux équations $du = 0$, $dv = 0$, à l'aide desquelles on pourrait déterminer les différentielles de deux des variables considérées comme fonctions implicites de toutes les autres.

En général, si n variables $x, y, z \ldots$ sont liées entre elles par les m équations $u = 0$, $v = 0$, $w = 0, \ldots$ on aura en même temps les m équations différentielles

$$du = 0, \quad dv = 0, \quad dw = 0, \ldots$$

à l'aide desquelles on pourra déterminer les différentielles de m variables considérées comme fonctions implicites de toutes les autres.

64. Considérons comme cas particulier une fonction

homogène de plusieurs variables x, y, z... On dit qu'une fonction est homogène, lorsqu'en faisant croître ou décroître toutes les variables dans un rapport donné, on obtient pour résultat la valeur primitive de la fonction multipliée par une puissance de ce rapport; l'exposant de cette puissance est le degré de la fonction homogène. En conséquence, $F(x, y, z, \ldots)$ sera une fonction de $x, y, z, \ldots$ homogène et du degré a, si t désignant une nouvelle variable, on a

$$F(tx, ty, tz, \ldots) = t^a F(x, y, z, \ldots).$$

Cela posé, différentions par rapport à t les deux membres de cette dernière équation. La dérivée du second membre est $at^{a-1}F(x, y, z)$: en posant

$$tx = u, \quad ty = v, \quad tz = w, \ldots$$

le premier membre devient $F(u, v, w, \ldots)$, sa dérivée est

$$\frac{dF}{du}\frac{du}{dt} + \frac{dF}{dv}\frac{dv}{dt} + \frac{dF}{dw}\frac{dw}{dt} + \text{etc.}$$

Nous aurons donc, en remarquant que

$$\frac{du}{dt} = x, \quad \frac{dv}{dt} = y, \quad \frac{dw}{dt} = z, \text{ etc.},$$

$$x\frac{dF}{du} + y\frac{dF}{dv} + z\frac{dF}{dw} \ldots = at^{a-1}F(x, y, z, \ldots),$$

et en faisant $t = 1$, ce qui donne $u = x$, $v = y$, $w = z, \ldots$

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz} \ldots = aF(x, y, z, \ldots).$$

Cette équation renferme un théorème que l'on peut énoncer comme il suit : Si l'on multiplie les dérivées partielles d'une fonction homogène du degré a par les variables auxquelles elles se rapportent, la somme des produits ainsi

formés sera équivalente au produit qu'on obtiendrait en multipliant la fonction elle-même par a. Pour une fonction homogène de degré nul, on aura $a = 0$,

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz} + \text{etc.} = 0.$$

Exemples :

1°. $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy)$,

$$\frac{dF}{dx} = Ax + Ez + Fy, \quad \frac{dF}{dy} = By + Dz + Fx,$$

$$\frac{dF}{dz} = Cz + Dy + Ex;$$

$a = 2$, et l'on a bien

$$(Ax + Ez + Fy)x + (By + Dz + Fx)y + (Cz + Dy + Ex)z$$
$$= 2 \times \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy);$$

2°. $F(x, y) = \frac{x}{y}$, $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{y}$, $\frac{dF}{dy} = -\frac{x}{y^2}$,

$$a = 0, \quad x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{xy}{y^2} = \frac{x}{y} - \frac{x}{y} = 0.$$

65. Considérons encore comme cas particulier une fonction de la somme de plusieurs variables x, y, z,... Cette fonction doit être telle, qu'en posant $x + y + z + \text{etc.} = t$, elle devienne $F(t)$ ou fonction de t seul ; or une propriété remarquable de ces fonctions, c'est que leurs dérivées partielles sont égales : en effet, en vertu de l'équation $u = F(t)$, nous avons

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dy}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dz};$$

d'ailleurs l'équation $x + y + z + \text{etc.} = t$ donne

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dz} \dots = 1,$$

donc en effet,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} = \frac{du}{dz} \cdots\cdots$$

Si l'on avait $u = \mathrm{F}(x - y)$, on aurait $\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dy}$; les dérivées seraient égales, mais de signes contraires.

Exemple :

$$u = (x + y)^m, \quad u = (x - y)^m.$$

QUATORZIÈME LEÇON.

Différentielles successives des fonctions de plusieurs variables indépendantes. — Différentielles des fonctions de fonctions de plusieurs variables. — Nouvelle manière de définir et de calculer les différentielles premières ou successives.

---

66. La différentielle d'une fonction $u = \mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$ de plusieurs variables indépendantes, est, en général, une fonction de ces variables que l'on pourra différentier plusieurs fois encore, soit par rapport à toutes les variables, soit par rapport à quelques-unes d'elles seulement. Dans le 1er cas, on obtiendra les différentielles totales successives de cette fonction, différentielles que nous désignerons toujours par les notations d^2u, d^3u, $d^4u, \ldots\, d^nu$; dans le second cas, on obtiendra des dérivées ou des différentielles partielles successives; ainsi, par exemple, les quantités $\frac{d^nu}{dx^n}$, $\frac{d^nu}{dy^n}$, $\frac{d^nu}{dz^n}$ exprimeront les dérivées partielles $n^{\text{ièmes}}$ prises par rapport à x, à y, à z. Si l'on différentie n fois, mais par rapport à plusieurs variables, ces variables mises en indices, ou leurs différentielles mises aux diviseurs, indiqueront dans quel ordre on aura effectué les différentiations : ainsi les notations $d_x^2 d_y d_z u$, $d^4_{x^2 y z}$, $\frac{d^4u}{dx^2\,dy\,dz}$ indiqueront qu'on a différentié ou pris les dérivées quatre fois; une fois par rapport à z, une fois par rapport à y, et deux fois par rapport à x, etc.

67. Il est facile de prouver que les différentielles partielles successives conservent la même valeur quand on

intervertit seulement l'ordre suivant lequel les différentiations relatives aux diverses variables doivent être effectuées. On aura par exemple

$$d_x d_y u = d_y d_x u, \text{ ou } \frac{d^2u}{dxdy} = d\frac{\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{d^2u}{dydx} = d\frac{\frac{du}{dx}}{dy}.$$

1re *Démonstration.* En désignant par la notation Δ_x l'accroissement d'une fonction de $x, y, z, \ldots$ lorsqu'on fait croître x seul de la quantité Δx, on trouve

$$\Delta_x d_y u = d_y(u + \Delta_x u) - d_y u = d_y \Delta_x u,$$

et par suite, en divisant par Δx, et remarquant que Δx est constant quand on différentie par rapport à y,

$$\frac{\Delta_x d_y u}{\Delta x} = \frac{d_y \Delta_x u}{\Delta x} = d_y \frac{\Delta_x u}{\Delta x},$$

et en passant à la limite,

$$\frac{d.d_y u}{dx} = d_y \frac{d_x u}{dx},$$

ou enfin

$$d_x d_y u = d_y d_x u.$$

2me *Démonstration.* On a, comme nous l'avons vu,

$$F(x + \Delta x, y, z) = F(x, y, z) + F'_x(x, y, z)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x,$$

ε_1 étant une fonction $\varphi(x, y, z, \Delta x)$ qui s'évanouit avec Δx. Si dans cette équation nous changeons y en $y + \Delta y$, ε_1 deviendra $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Delta y$, et comme on a d'ailleurs, en indiquant par $F''_{yx}(x, y, z)$ la dérivée seconde de $F(x)$ prise d'abord par rapport à x, puis par rapport à y,

$$F(x, y + \Delta y, z) = F(x, y, z) + F'_y(x, y, z)\Delta y + \varepsilon_3 \Delta y,$$
$$F'_x(x, y + \Delta y, z) = F'_x(x, y, z) + F''_{yx}(x, y, z)\Delta y + \varepsilon_4 \Delta y,$$

on trouvera

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z)=F(x,\ y,\ z)+F'_x(x,\ y,\ z)\,\Delta x$$
$$+F'_y(x,\ y,\ z)\Delta y+F''_{yx}(x,y,z)\Delta x\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_3\Delta y+\varepsilon'\Delta x\Delta y,$$

ε' étant une quantité qui s'évanouit avec Δx ou avec Δy.

Si nous étions partis de l'équation

$$F(x,\ y+\Delta y,\ z)=F(x,\ y,\ z)+F_y(x,\ y,\ z)\,\Delta y+\varepsilon_3\Delta y,$$

ε_3 étant le même que précédemment, nous aurions trouvé, en désignant par F''_{xy} la dérivée seconde de $F(x, y, z)$, prise d'abord par rapport à y, puis par rapport à x,

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z)=F(x,y,z)+F'_x(x,y,z)\Delta x+F'_y(x,y,z)\,\Delta y$$
$$+F''_{xy}(x,\ y,\ z)\,\Delta x\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_3\Delta y+\varepsilon''\Delta x\Delta y.$$

En égalant ces deux valeurs, supprimant les termes qui se détruisent, et divisant par $\Delta x\Delta y$, on trouve

$$F''_{yx}(x,\ y,\ z)+\varepsilon'=F''_{xy}(x,\ y,\ z)+\varepsilon'',$$

ε'' étant encore une quantité qui s'évanouit avec Δx ou avec Δy; or cette équation ne peut subsister qu'autant que l'on aura

$$F''_{xy}(x,\ y,\ z)=\frac{d^2u}{dydx}=F''_{xy}(x,\ y,\ z)=\frac{d^2u}{dxdy},\quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème étant démontré pour les dérivées du second ordre, il en résulte que dans une expression de la forme $d_xd_yd_z\ldots\, u$, il est toujours permis d'échanger entre elles les variables auxquelles se rapportent deux différentiations consécutives. Or, il est clair qu'à l'aide d'un ou de plusieurs échanges de cette espèce, on pourra intervertir de toutes les manières possibles l'ordre des différentiations. Ainsi, par exemple, pour démontrer que $d_zd_yd_x u = d_xd_yd_z u$, il suffira d'amener d'abord par deux échanges consécutifs la lettre x à la place de z,

puis d'échanger les lettres y et z :on peut donc affirmer qu'une différentielle de l'ordre quelconque n a une valeur indépendante de l'ordre suivant lequel les différentiations sont effectuées.

68. Comme en différentiant une fonction des variables indépendantes x, y, z, par rapport à l'une d'elles, on obtient pour résultat une nouvelle fonction de x, y, z, multipliée par la constante dx ou dy, ou $dz\ldots$, et que dans la différentiation d'un produit les facteurs constants passent toujours en dehors de la caractéristique d, il est clair que si l'on effectue l'une après l'autre sur la fonction $u = \mathrm{F}(x, y, z)$, l différentiations relatives à x, m différentiations relatives à y, n différentiations relatives à z, la différentielle qui résultera de ces diverses opérations, savoir $d^n_z\, d^m_y\, d^l_x u$, sera le produit d'une nouvelle fonction $\varphi(x, y, z)$ par les facteurs dx^l, dy^m, dz^n, la nouvelle fonction dont il s'agit ici est ce qu'on nomme une dérivée partielle de u de l'ordre $l + m + n$, et l'on a

$$d^n_z\, d^m_y\, d^l_x u = \varphi(x, y, z)\, dx^l dy^m dz^n,\ \varphi(x, y, z) = \frac{d^{l+m+n} u}{dx^l\, dy^m\, dz^n}.$$

Cela posé, en différentiant plusieurs fois de suite l'équation $u = \mathrm{F}(x, y, z)$, nous aurons

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = d_x u + d_y u + d_z u,$$

$$d^2 u = d^2_x u + d^2_y u + d^2_z u + 2d^2_{xy} u + 2d^2_{xz} u + 2d^2_{yz} u,$$

ou

$$d^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2 u}{dz^2} dz^2 + 2\frac{d^2 u}{dxdy} dxdy$$
$$+ 2\frac{d^2 u}{dxdz} dxdz + 2\frac{d^2 u}{dydz} dydz.$$

Exemples :

$u = xyz,\ d^2 u = 2(xdydz + ydzdx + zdxdy),\ d^3 u = 6dxdydz,$

$$d^2(x^2+y^2+z^2)=2(dx^2+dy^2+dz^2),$$
$$d^3(x^3+y^3+z^3)=6(dx^3+dy^3+dz^3).$$

69. Si au lieu de l'équation $u=\mathrm{F}(x, y, z)$, on considérait la suivante $s=\mathrm{F}(u, v, w)$, les quantités u, v, w, étant elles-mêmes des fonctions quelconques des variables x, y, z, comme en résumé s serait encore fonction de x, y, z, on aurait toujours

$$ds=\frac{ds}{dx}dx+\frac{ds}{dy}dy+\frac{ds}{dz}dz.$$

Mais comme u, v, w seraient des fonctions de x, on aurait

$$\frac{ds}{dx}dx=\frac{ds}{du}\frac{du}{dx}dx+\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx}dx+\frac{ds}{dw}\frac{dw}{dx}dx,$$
$$\frac{ds}{dy}dy=\ldots,\quad \frac{ds}{dz}dz=\ldots,$$

et par suite, en remarquant que

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz,\quad dv=\ldots,\quad dw=\ldots,$$

on trouverait

$$ds=\frac{ds}{du}du+\frac{ds}{dv}dv+\frac{ds}{dw}dw;$$

une seconde différentiation donnerait

$$d^2s=\frac{d^2s}{du^2}du^2+\frac{d^2s}{dv^2}dv^2+\frac{d^2s}{dw^2}dw^2+\frac{2d^2s}{dudv}dudv$$
$$+\frac{2d^2s}{dudw}dudw+\frac{2d^2s}{dv\,dw}dvdw+\frac{ds}{du}d^2u+\frac{ds}{dv}d^2v+\frac{ds}{dw}d^2w,$$
$$d^3s=\ldots$$

La règle générale est donc encore de différentier comme si u, v, w étaient des variables indépendantes, puis de tirer la valeur de du, dv, dw, etc., des équations qui lient les quantités u, v, w aux variables indépendantes x, y, z.

Exemples :

$$d^n(u+v)=d^nu+d^nv,\quad d^n(u-v)=d^nu-d^nv,$$

$$d^n(u + v\sqrt{-1}) = d^n u + \sqrt{-1}\, d^n v;$$
$$d^n(au + bv + cw) = ad^m u + bd^n v + cd^n w.$$

Si les quantités u, v, w étaient des fonctions linéaires des variables indépendantes x, y, z, c'est-à-dire si l'on avait

$$u = ax + by + cz + d, \quad v = a'x + b'y + c'z + d',$$
$$w = a''x + b''y + c''z + d'',$$

on aurait

$$d^2u = 0, \quad d^2v = 0, \quad d^2w = 0,$$

et les différentielles successives de la fonction $s = \mathrm{F}(u, v, w)$ conserveraient la même forme que dans le cas où u, v, w seraient variables indépendantes ; on aurait ainsi

$$d^2s = \frac{d^2s}{du^2}du^2 + \frac{d^2s}{dv^2}dv^2 + \frac{d^2s}{dw^2}dw^2 + \frac{2d^2s}{dudv}dudv$$
$$+ \frac{2d^2s}{dudw}dudw + \frac{2d^2s}{dvdw}dvdw.$$

Exemples :

Si $s = \mathrm{F}(u, v)$, on aura

$$d^ns = \frac{d^ns}{du^n} + \frac{n}{1}\frac{d^ns}{du^{n-1}dv}du^{n-1}dv$$
$$+ \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{d^ns}{du^{n-2}dv^2}du^{n-2}dv^2 + \ldots \frac{d^ns}{dv^n}dv^n;$$

si $s = \mathrm{F}(u)\mathrm{F}(v)$,

$$d^ns = \mathrm{F}^n(u)\mathrm{F}(v)du^n + \frac{n}{1}\mathrm{F}^{n-1}u\,\mathrm{F}'(v)\,du^{n-1}dv \ldots\ldots$$
$$+ \frac{n}{1}\mathrm{F}'(u)\mathrm{F}^{n-1}(v)dudv^{n-1} + \mathrm{F}(u)\,\mathrm{F}^n(v)dv^n.$$

70. M. Cauchy a donné des différentielles des fonctions une définition immédiate, indépendante de la considération des dérivées, qui semble plus rationnelle et présente de grands avantages, surtout lorsqu'il s'agit d'une fonction de plusieurs variables indépendantes. Il appelle différentielles et il désigne par les notations dx, dy, dz,... du, des quantités dont les rapports sont équiva-

lents aux dernières raisons des accroissements que peuvent prendre simultanément ces variables. Cette définition conduit immédiatement à celle que nous prenions pour point de départ, quand, dans le cas où il s'agissait d'une fonction d'une seule variable indépendante, nous appelions différentielle le produit de la dérivée par l'accroissement arbitraire attribué à la variable indépendante. En effet, d'après la nouvelle définition, le rapport des différentielles $\frac{dy}{dx}$ coïncide avec la dernière raison des accroissements Δy, Δx; on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad dy = y' dx.$$

De plus, en partant de cette même définition, les accroissements simultanés infiniment petits

$$\Delta x, \ \Delta y, \ \Delta z, \ldots \ \Delta u,$$

d'un nombre quelconque de variables dépendantes ou indépendantes, deviendront sensiblement proportionnels aux différentielles

$$dx, \ dy, \ dz, \ldots \ du;$$

dès lors, si l'on désigne par α la valeur infiniment petite de l'un des rapports

$$\frac{\Delta x}{dx}, \ \frac{\Delta y}{dy}, \ \frac{\Delta z}{dz}, \ldots \ \frac{\Delta u}{du};$$

si l'on pose, par exemple, $\frac{\Delta x}{dx} = \alpha$, chacun des autres rapports différera très peu de α, on aura, par exemple, $\frac{\Delta u}{\alpha} = du + \beta$, β devenant s'évanouir avec α, et l'on trouvera, en passant à la limite, $du = \lim. \frac{\Delta u}{\alpha}$. On pourra de cette manière calculer immédiatement la différentielle. Appliquons ces principes à la détermination de la différentielle d'une fonction, $u = F(x, y, z)$, de plusieurs va-

riables indépendantes. Pour cela, posons

$$\Delta x = \alpha dx,\quad \Delta y = \alpha dy,\quad \Delta z = \alpha dz,$$

dx, dy, dz, étant des quantités arbitraires, de telle sorte que ces équations n'établissent aucune liaison entre les accroissements des variables, et les laissent tout-à-fait indépendantes ; en vertu de la définition même de la différentielle, on aura

$$du = \text{lim.}\frac{\Delta u}{\alpha} = \text{lim.}\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x,y,z)}{\alpha}$$
$$= \text{lim.}\left[\frac{F(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz) - F(x,y,z)}{\alpha}\right].$$

En posant

$$F(x+\alpha dx,\quad y+\alpha dy,\quad z+\alpha dz) = f(\alpha),$$

d'où

$$F(x,y,z) = f(0),$$

on trouvera

$$du = \text{lim.}\frac{\Delta u}{\alpha} = \text{lim.}\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha};$$

on a d'ailleurs

$$f'(\alpha) = \frac{dF}{d(x+\alpha dx)}dx + \frac{dF}{d(y+\alpha dy)}dy + \frac{dF}{d(z+\alpha dz)}dz,$$

d'où

$$f'(0) = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

Or, si dans l'équation

$$f(x+h) - f(x) = hf'x + R_1 h,$$

on fait $x = 0$, $h = \alpha$, on trouve

$$f(\alpha) - f(0) = \alpha f'(0) + R_1\alpha,$$

R_1 s'évanouissant avec α, et par suite

$$du = \text{lim.}\left[\frac{\alpha f'(0) + R_1\alpha}{\alpha}\right] = f'(0) = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz.$$

Nota. On aurait pu écrire immédiatement

$$du = \text{lim.}\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha} = \text{lim.}\frac{f'(\alpha)}{1} = f'(0).$$

La définition de M. Cauchy conduit donc aussi à ce théorème, que la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables est la somme de ses différentielles partielles.

On aurait pu calculer directement la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\alpha}$, en remarquant que

$$\frac{\Delta u}{\alpha}=\frac{\mathrm{F}(x+\alpha dx,y,z)-\mathrm{F}(x,y,z)+\mathrm{F}(x+\alpha dx,y+\alpha dy,z)-\mathrm{F}(x+\alpha dx,y,z)}{\alpha}$$
$$+\frac{\mathrm{F}(x+\alpha dx,y+\alpha dy,z+\alpha dz)-\mathrm{F}(x+\alpha dx,y+\alpha dy,z)}{\alpha}$$
$$=\frac{\mathrm{F}'_x(x,y,z)\,\alpha dx+\mathrm{R}_1\,\alpha dx+\mathrm{F}'_y(x+\alpha dx,y,z)\,\alpha dy+\mathrm{R}_2\,\alpha dy}{\alpha}$$
$$+\frac{\mathrm{F}'_z(x+\alpha dx,y+\alpha dy,z)\,\alpha dz+\mathrm{R}_3\,\alpha dz}{\alpha};$$

d'où

$$du=\lim.\frac{\Delta u}{\alpha}=\mathrm{F}'_x(x,y,z)\,dx+\mathrm{F}'_y(x,y,z)\,dy+\mathrm{F}'_z(x,y,z)\,dz$$
$$=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz.$$

71. Les dérivées successives $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $f'''(\alpha)$, etc., de la fonction

$$f(\alpha)=\mathrm{F}(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz),$$

seront toutes des fonctions des seules quantités variables $x+\alpha dx$, $y+\alpha dy$, $z+\alpha dz$, et par suite les différences $f(\alpha)-f(0)$, $f'(\alpha)-f'(0)$, $f''(\alpha)-f''(0)$, seront précisément égales aux accroissements que reçoivent les fonctions de x, y, z, représentées par $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$,... lorsqu'on attribue aux variables indépendantes les accroissements $\Delta x=\alpha dx$, $\Delta y=\alpha dy$, $\Delta z=\alpha dz$; on aura donc successivement

$$du=\lim.\frac{\Delta u}{\alpha}=\lim.\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}=f'(0),$$
$$d^2u=\lim.\frac{\Delta\,.\,du}{\alpha}=\lim.\frac{f'(\alpha)-f'(0)}{\alpha}=f''(0),$$

$$d^3u = \lim. \frac{\Delta . d^2u}{\alpha} = \lim. \frac{f''(\alpha) - f''(0)}{\alpha} = f'''(0),$$

. . . .

$$d^nu = \lim. \frac{\Delta . d^{n-1}u}{\alpha} = \lim. \frac{f^{n-1}(\alpha) - f^{n-1}(0)}{\alpha} = f^n(0),$$

et nous en conclurons que pour former les différentielles totales du, $d^2u \ldots$, d^nu, il suffit de calculer les valeurs particulières que reçoivent les dérivées $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $f'''(\alpha) \ldots$ $f^n(\alpha)$, dans le cas où la variable α s'évanouit.

72. Parmi les méthodes propres à simplifier la recherche des différentielles totales, on doit distinguer surtout celles qui s'appuient sur la considération des valeurs symboliques de ces différentielles.

Si l'on désigne par a, b, $c \ldots$, des quantités constantes, la différentielle totale de l'expression

$$ad_x^l d_y^m d_z^n . u + bd_x^p d_y^q d_z^r . u + \text{etc} \ldots$$

sera

$$ad_x^{l+1} d_y^m d_z^n . u + ad_x^l d_y^{m+1} d_z^n . u + ad_x^l d_y^m d_z^{n+1} . u + bd_x^{p+1} d_y^q d_z^r . u + \text{etc.}$$

C'est-à-dire qu'elle sera précisément ce qu'on aurait obtenu si l'on avait multiplié le produit des deux facteurs u et $ad_x^l d_y^m d_z^n + bd_x^p d_y^q d_z^r \ldots$ par $d_x + d_y + d_z$, en opérant comme si les notations d_x, d_y, d_z représentaient de véritables quantités différentes les unes des autres.

Lorsqu'on ne fait qu'indiquer la multiplication, on trouve l'équation symbolique

$$d\left(ad_x^l d_y^m d_z^n . u + bd_x^p d_y^q d_z^r . u + \text{etc.} \ldots\right) = \left(ad_x^l d_y^m d_z^n + bd_x^p d_y^q d_z^r + \ldots\right)(d_x + d_y + d_z)u.$$

Comme en réalité, d_x, d_y, d_z, ne sont pas des quantités, mais des symboles qui indiquent une opération à faire, la formule qui précède, prise à la lettre, n'a aucun sens, mais elle redevient exacte dès qu'on a développé son second membre à l'aide des règles ordinaires de la multiplication algébrique.

Si l'on pose

$$ad^l_x d^m_y d^n_z u + bd^p_x d^q_y d^r_z u = d_x u + d_y u + d_z u = (d_x + d_y + d_z)\, u,$$

et si l'on différentie plusieurs fois de suite, on arrivera à l'équation symbolique

$$d^n u = (d_x + d_y + d_z)^n u,$$

qui prouve que dans l'expression de la différentielle $n^{\text{ième}}$ les coefficients sont les coefficients du binome.

Si $s = F(u, v, w)$, on aura encore $d^n s = (d_x + d_y + d_z)^n s$, et il sera très facile de développer le second membre de cette dernière équation dans le cas particulier où l'on suppose u fonction de x seul, v fonction de y seul, w fonction de z seul. D'ailleurs pour passer de ce cas particulier au cas général, il suffira évidemment de remplacer $d_x u$, $d^2_x u$, $d^3_x u$ par du, $d^2 u$, $d^3 u$,... $d_y v$, $d^2_y v$... par dv, $d^2 v$, etc..., c'est-à-dire d'effacer les lettres x, y, z, placées en bas de la caractéristique d.

Exemple : $s = uv$; en opérant comme on vient de le dire, on trouvera

$$d^n(uv) = v d^n_x u + \frac{n}{1} d_y v d^{n-1}_x u + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2_y v d^{n-2}_x u \ldots + n d_x u d^{n-1}_y v + u d^n_y v,$$

$$d^n . uv = v d^n u + \frac{n}{1} dv d^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 v d^{n-2} u \ldots + n du\, d^{n-1} v + u d^n v.$$

Cette dernière formule subsistera, quelles que soient les valeurs de u, v, et de x, y, et dans le cas même où u, v, se réduisent à deux fonctions de x.

Exemple :

$$d^n . \frac{e^{ax}}{x} = \frac{a^n e^{ax}}{x} \left[1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3 x^3} \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n x^n} \right] dx^n.$$

QUINZIÈME LEÇON.

Application à des questions d'analyse qui dépendent de plusieurs variables indépendantes.

Première application. — Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables, liées par une seule équation.

73. Lorsqu'une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, ... etc., atteint une valeur particulière, mais réelle, qui surpasse toutes les valeurs voisines, c'est-à-dire toutes celles que l'on obtiendrait en faisant varier x, y, z en plus ou en moins de quantités très petites, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un *maximum*. Lorsqu'une valeur particulière d'une fonction de x, y, z est réelle et inférieure à toutes les valeurs réelles voisines, elle prend le nom de *minimum*.

La recherche des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables, se ramène facilement à la recherche des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable. En effet, pour que la valeur $F(x, y, z)$ soit un maximum ou un minimum, il faut que la différence

$$\begin{aligned} &F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-F(x,y,z) \\ =\ &F(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz)-F(x,y,z)=f(\alpha)-f(0) \end{aligned}$$

soit toujours négative ou toujours positive : négative pour un maximum, positive pour un minimum ; ce qui exige,

1°. Que $f(0)$ soit une valeur maximum ou minimum de $f(\alpha)$;

2°. Que $f'(0) = 0$, ou $f'(0) = \pm \infty$;

3°. En supposant la fonction $f(\alpha)$ continue ainsi que ses dérivées, que la première de ces dérivées qui ne s'évanouisse pas pour $\alpha = 0$ soit une dérivée d'ordre pair, et qu'elle soit négative s'il s'agit d'un maximum, positive s'il s'agit d'un minimum, et par conséquent, en observant,

1°. Que les valeurs qui rendent la fonction $F(x, y, z)$ discontinue peuvent lui donner une valeur minimum ou maximum;

2°. Que $f'(0) = du$, $f''(0) = d^2u \ldots$, $f^{(n)}(0) = d^n u$, on arrivera à la règle suivante.

Pour trouver les maxima et les minima d'une fonction de plusieurs variables indépendantes,

1°. On choisira les valeurs de x, y, z qui rendent la fonction discontinue;

2°. On fera

$$dF(x, y, z) = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = \pm \infty;$$

3°. On fera $du = 0$, équation qui entraîne les trois suivantes,

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0,$$

puisque dx, dy, dz sont des accroissements entièrement arbitraires et indépendants;

4°. De ces dernières équations on tirera les valeurs de x, y, z;

5°. Pour décider si le système de ces valeurs produit un maximum ou minimum, on calculera les valeurs des différentielles successives d^2u, d^3u, $d^4u \ldots$ qui correspondent à ce système. Soit

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n}dx^n + \frac{d^n u}{dy^n}dy^n \ldots + \frac{n}{1}\,\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \text{etc.},$$

la première de ces différentielles qui ne s'évanouit pas. Si pour toutes les valeurs des différentielles dx, dy, dz, n est un nombre pair, et $d^n u$ une quantité négative, la valeur proposée de u sera un maximum; elle sera un minimum si n étant toujours pair, $d^n u$ reste toujours positif. Enfin si n est quelquefois impair, ou si la différentielle $d^n u$ est tantôt positive et tantôt négative, la valeur de u ne sera ni maximum, ni minimum.

74. Concevons que pour appliquer le théorème on forme d'abord la valeur de

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 \ldots + \frac{2d^2u}{dxdy}dxdy + \text{etc.},$$

pour y substituer à x, y, z leurs valeurs tirées des équations

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \text{ etc.}$$

Alors, 1° si les dérivées partielles

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \ldots \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \ldots$$

s'évanouissent, il faudra recourir aux différentielles suivantes d^3u, d^3u, . . . etc.; 2°. si ces différentielles partielles ne s'évanouissent pas, et que l'on fasse varier les quantités arbitraires dx, dy, dz, il arrivera de trois choses l'une: ou la différentielle d^2u conservera constamment le même signe, sans jamais s'évanouir, ou elle s'évanouira pour certaines valeurs de dx, dy, dz, mais en reprenant le même signe toutes les fois qu'elle cessera d'être nulle; ou elle sera tantôt positive et tantôt négative : la valeur proposée de u sera toujours un maximum ou un minimum dans le premier cas, quelquefois dans le second, jamais dans le troisième. On obtiendra dans le second cas un maximum ou un minimum, si pour chacun des systèmes

de dx, dy, dz... propres à vérifier l'équation $d^2u=0$, la première des différentielles d^3u, d^4u,... etc., qui ne s'évanouit pas, est toujours d'ordre pair et affectée du même signe que celles des valeurs de d^2u qui diffèrent de o.

En général, si la 1re des différentielles d'ordre pair qui ne s'évanouit pas est

$$d^{2m}u = \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}dx^{2m} + \frac{d^{2m}u}{dy^{2m}}dy^{2m} + \ldots$$
$$+ \frac{2m}{1}\frac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}dx^{2m-1}dy + \ldots \text{ etc.},$$

il pourra arriver trois choses : ou la différentielle dont il s'agit conserve toujours le même signe, quand on fait varier dx, dy, dz... ; ou bien elle s'évanouit pour certaines valeurs de dx, dy, dz,... mais reprend toujours le même signe dès qu'elle cesse de s'évanouir ; ou elle est tantôt positive et tantôt négative. La valeur correspondante de u sera toujours un maximum ou un minimum dans le premier cas, jamais dans le troisième, quelquefois dans le second ; c'est-à-dire si, parmi les différentielles d'un ordre supérieur à $2m$, celle qui la première cesse de s'évanouir est d'ordre pair, et si elle est toujours affectée du même signe que les valeurs de $d^{2m}u$ qui diffèrent de o. Il est essentiel d'observer que $d^{2m}u$ étant une fonction entière et continue de dx, dy, dz,... ne saurait passer du positif au négatif, tandis que ces quantités varient, sans devenir nul dans l'intervalle, c'est-à-dire sans que l'équation $d^{2m}u = 0$ admette une ou plusieurs racines réelles. De sorte que pour que $d^{2m}u$ ne change pas de signe il faut et il suffit que l'équation $d^{2m}u = 0$ n'admette que des racines imaginaires. Dans ce cas il y aura toujours maximum ou minimum ; maximum si $d^{2m}u$ est une quantité toujours négative, minimum si $d^{2m}u$ est une quantité toujours positive.

75. *Exemple :* Supposons

$$u = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$
$$du = (2Ax + By + D)\,dx + (Bx + 2Cy + E)\,dy,$$
$$d^2u = 2\,(Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2),\quad d^3u = 0,\quad d^4u = 0, \text{etc.}$$

Les valeurs de x, y, propres à produire un maximum ou un minimum, seront déterminées par les équations

$$2Ax + By + D = 0,\quad Bx + 2Cy + E = 0,$$

d'où

$$y = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC},\quad x = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC};$$

de plus, 1° l'équation

$$d^2u = 2(Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2) = 2Ady^2\left(\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{B}{A}\frac{dx}{dy} + \frac{C}{A}\right) = 0$$

n'admettra que des racines imaginaires, si $B^2 - 4AC < 0$, et d^2u sera alors toujours positif ou toujours négatif, suivant que A sera plus grand ou plus petit que 0; ainsi la fonction

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

admettra un maximum si

$$B^2 - 4AC < 0,\quad A < 0,$$

un minimum si

$$B^2 - 4AC < 0,\quad A > 0.$$

2°. Si $B^2 - 4AC > 0$, l'équation $d^2u = 0$ admettra des racines réelles, et d^2u changera de signe pour certaines valeurs de dx et dy, ou du rapport $\frac{dx}{dy}$; il n'y aura donc alors ni maximum ni minimum.

3°. Si $B^2 - 4AC = 0$, et si l'on n'a pas en même temps

$$2AE - BD = 0 \quad \text{et} \quad 2CD - BE = 0,$$

l'une des valeurs de x ou de y sera infinie, la fonction donnée n'aura ni maximum ni minimum. Supposons que ces conditions soient satisfaites ; alors les deux équations

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0,$$

se réduisent à une seule, par exemple à

$$\frac{du}{dx}=2Ax+By+D=0,$$

et les valeurs de x et de y sont indéterminées. On a dans ce cas

$$d^2u=2\left(Adx^2+2\sqrt{AC}\,.\,dxdy+Cdy^2\right)=2Adx^2\left(1+\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}\frac{dy}{dx}\right)^2;$$

cette valeur de d^2u se réduit, il est vrai, à 0, toutes les fois que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}};$$

mais pour toute autre valeur de $\frac{dy}{dx}$, cette différentielle seconde est de même signe que A ; et d'ailleurs

$$d^3u=0, \quad d^4u=0, \text{ etc.}$$

La différence Δu, lorsqu'elle ne sera pas nulle, sera donc toujours positive ou toujours négative en même temps que A, et par conséquent la fonction u admettra une valeur minimum si $A>0$, et une valeur maximum si $A<0$.

Si B s'évanouissait, on aurait nécessairement, en vertu des équations

$$B^2-4AC=0, \quad 2AE-BD=0, \quad 2CD-BE=0,$$

ou

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad u=Dx+Ey+F;$$

ou

$$A=0, \quad B=0, \quad D=0, \quad u=Cy^2+Ey+F,$$

ou enfin

$$B = 0,\ C = 0,\ E = 0,\ u = Ax^2 + Dx + F;$$

dans le premier cas la fonction u n'aurait ni maximum ni minimum, dans les deux derniers cas elle aurait une infinité de maxima ou de minima égaux à

$$\frac{4CF - E^2}{4C} \text{ ou } \frac{4AF - D^2}{4A}.$$

76. *Scolie* 1re. En général, on a

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy,$$

ou

$$d^2u = \frac{d^2u}{dy^2} \times dx^2 \left(\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{2\dfrac{d^2u}{dxdy}}{\dfrac{d^2u}{dy^2}} \frac{dy}{dx} + \frac{\dfrac{d^2u}{dx^2}}{\dfrac{d^2u}{dy^2}} \right),$$

et par conséquent, 1° d^2u aura constamment le signe de $\frac{d^2u}{dy^2}$, si l'équation

$$\frac{dy^2}{dx^2} + 2\frac{\dfrac{d^2u}{dxdy}}{\dfrac{d^2u}{dy^2}} \frac{dy}{dx} + \frac{\dfrac{d^2u}{dx^2}}{\dfrac{d^2u}{dy^2}} = 0$$

n'a que des racines imaginaires, c'est-à-dire si l'on a

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2u}{dx^2} < 0,$$

ce qui exige que $\frac{d^2u}{dy^2}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$ soient des quantités de même signe; la fonction u admettra donc un maximum si l'on a à la fois

$$\frac{d^2u}{dy^2} < 0,\quad \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2u}{dx^2} < 0,$$

et un minimum, si

$$\frac{d^2u}{dy^2} > 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dy^2}\,\frac{d^2u}{dx^2} < 0.$$

2°. La fonction n'admettra de maximum ou de minimum, dans le cas où

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dy^2}\,\frac{d^2u}{dx^2} = 0;$$

qu'autant que la première des différentielles d^3u, d^4u,... qui cessera de s'évanouir pour les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ propres à vérifier l'équation

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{2\dfrac{d^2u}{dxdy}}{\dfrac{d^2u}{dy^2}}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\dfrac{d^2u}{dx^2}}{\dfrac{d^2u}{dy^2}} = 0,$$

sera d'ordre pair, et constamment de même signe que d^2u quand il ne s'évanouit pas. 3°. Si

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dy^2}\,\frac{d^2u}{dx^2} > 0,$$

la fonction u n'admettra ni maximum ni minimum.

Scolie 2ᵉ. S'il s'agit d'une fonction de trois variables, on aura

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2u}{dxdz}dxdz + 2\frac{d^2u}{dydz}dydz,$$

et en posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dx} = q,$$

$$d^2u = dx^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}p^2 + \frac{d^2u}{dz^2}q^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}p + 2\frac{d^2u}{dxdz}q + 2\frac{d^2u}{dydz}pq\right).$$

Pour que d^2u ne change jamais de signe, il faut, 1° que l'équation $d^2u = 0$, résolue par rapport à q, n'ait pas de racines réelles, ce qui exige que l'on ait, quel que soit p,

$$\left(\frac{d^2u}{dxdz} + \frac{d^2u}{dydz}p\right)^2 - \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}p^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}p\right) < 0,$$

ou

$$\left[\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dy^2}\right]p^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdz} - \frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dxdy}\right)p + \left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dx^2} < 0.$$

Cette dernière condition sera elle-même satisfaite quand on aura

$$\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dy^2} < 0,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdz} - \frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \left[\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dy^2}\right]\left[\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dx^2}\right] < 0.$$

Telles sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction u admette un maximum ou un minimum; ce sera un maximum si $\frac{d^2u}{dz^2} < 0$, et un minimum si $\frac{d^2u}{dz^2} > 0$.

77. 1er *Exemple*. De tous les triangles isopérimètres, quel est le plus grand en surface?

Solution. Soient x, y, z les côtés, $p = \frac{x+y+z}{2}$ le demi-périmètre donné, on aura $z = 2p - x - y$, et la surface du triangle sera donnée par l'équation

$$u = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)};$$

les équations

$$\frac{du}{dx}=0,\ \frac{du}{dy}=0,$$

se réduiront à

$$p(p-y)(2p-2x-y)=0,$$
$$p(p-x)(2p-2y-x)=0;$$

on ne peut poser ni $p-y=0$, ni $p-x=0$, puisque sans cela on aurait

$$2p=2y=x+y+z,\ y=x+z,$$

ou

$$2p=2x=x+y+z,\ x=y+z,$$

ce qui est absurde; il faudra donc que l'on ait

$$2p-2x-y=0,\ 2p-2y-x=0,$$

d'où

$$x=y=\tfrac{2}{3}p,\ z=2p-x-y=\tfrac{2}{3}p.$$

De plus, pour ces valeurs de x et de y, on aura

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\sqrt{3},\quad \frac{d^2u}{dy^2}=-\sqrt{3},$$
$$\frac{d^2u}{dxdy}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\frac{d^2u}{dy^2}$ est négatif, et de plus

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2u}{dy^2}\,\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{3}{4}-3=-\frac{9}{4}<0;$$

les valeurs de x et de y donnent donc un maximum de la fonction u, et le plus grand des triangles isopérimètres est le triangle équilatéral.

2me *Exemple*. De tous les parallélépipèdes inscrits dans une sphère, quel est le plus grand?

Solution. Tous les parallélépipèdes inscrits sont des parallélépipèdes rectangles, leur centre coïncide avec le centre de la sphère, leur diagonale est le diamètre D de la sphère, et en désignant par x, y deux des côtés, le troisième $z = \sqrt{D^2 - x^2 - y^2}$. Cela posé, le volume du parallélépipède sera

$$u = xyz = xy\sqrt{D^2 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{du}{dx} = y\sqrt{D^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2y}{\sqrt{D^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{D^2 - x^2 - y^2}}(D^2 - 2x^2 - y^2),$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{x}{\sqrt{D^2 - x^2 - y^2}}(D^2 - 2y^2 - x^2);$$

donc

$$D^2 - 2x^2 - y^2 = 0,\quad D^2 - 2y^2 - x^2 = 0,\quad x = y = z = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

De plus, les valeurs correspondantes de $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ s'obtiendront facilement en ayant égard aux équations

$$D^2 - 2x^2 - y^2 = 0,\quad D^2 - 2y^2 - x^2 = 0,$$

et l'on trouvera

$$\frac{d^2u}{dxdy} = -\frac{2D}{\sqrt{3}},\quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{4D}{\sqrt{3}},\quad \frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{4D}{\sqrt{3}};$$

donc

1°. $$\frac{d^2u}{dy^2} < 0;$$

2°. $$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4D^2}{3} - \frac{16D^2}{3} = -\frac{12D^2}{3} < 0;$$

le parallélépipède maximum sera donc le cube qui a pour côté $\frac{D}{\sqrt{3}}$.

3[me] *Application.* Soit $F(z)$ une fonction entière et réelle de z, si l'on pose $z = x + y\sqrt{-1}$, on aura

$$F(x + y\sqrt{-1}) = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T),$$
$$F(x - y\sqrt{-1}) = R(\cos T - \sqrt{-1}\sin T),$$
$$R^2 = F(x + y\sqrt{-1})F(x - y\sqrt{-1}).$$

Cela posé, il sera facile de prouver que si le module R admet pour $z = x + y\sqrt{-1}$ une valeur minimum, cette valeur minimum sera nécessairement nulle. En effet, soit $F^{(n)}(x \pm y\sqrt{-1})$ la première des dérivées qui ne s'évanouisse pas pour $z = x + y\sqrt{-1}$, de sorte que l'on ait

$$F'(x \pm y\sqrt{-1}) = 0, \quad F''(x \pm y\sqrt{-1}) = 0 \ldots, \quad F^{(n-1)}(x \pm y\sqrt{-1}) = 0,$$

l'équation connue

$$d^n(uv) = vd^nu + ndvd^{n-1}u + \ldots + ndu\, d^{n-1}v + u\, d^nv$$

donnera, en y faisant

$$u = F(x + y\sqrt{-1}), \quad v = F(x - y\sqrt{-1}),$$
$$\begin{aligned} d^n.R^2 = {} & d^n\left[F(x+y\sqrt{-1})F(x-y\sqrt{-1})\right] \\ = {} & F^{(n)}(x+y\sqrt{-1})F(x-y\sqrt{-1})(dx+dy\sqrt{-1})^n \\ & + F(x+y\sqrt{-1})F^{(n)}(x-y\sqrt{-1})(dx-dy\sqrt{-1})^n, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en posant

$$x + y\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$
$$dx + dy\sqrt{-1} = \rho(\cos \tau + \sqrt{-1}\sin \tau),$$
$$F^{(n)}(x \pm y\sqrt{-1}) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n),$$
$$d^n.R^2 = 2RR_n\rho^n\cos(T_n - T + n\tau);$$

or, si la valeur minimum de R ou de R^2 n'était pas nulle, $d^n.R^2$ changerait évidemment de signe dans le cas où l'on

donnerait à τ, et par suite à dx et dy, certaines valeurs, par exemple si l'on changeait τ en $\tau + \frac{2m+1}{n}\pi$, et par conséquent la valeur de R dont il est question ne pourrait pas être une valeur minimum.

On démontre facilement, à l'aide de ce qui précède, que toute équation entière

$$F(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

à coefficients réels ou imaginaires, admet une ou plusieurs racines réelles ou imaginaires. En effet, le module R qui, en désignant par $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$ les modules des coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$, est toujours plus grand que

$$r^m - \rho_1 r^{m-1} - \rho_2 r^{m-2} - \ldots - \rho_m$$

et plus petit que

$$r^m + \rho_1 r^{m-1} + \rho_2 r^{m-2} + \ldots + \rho_m,$$

finit par croître indéfiniment avec r ou avec x, y. Cela posé, parmi toutes les valeurs que prend le module R pour des valeurs finies de x et de y, il en est nécessairement une plus petite que toutes les autres : or cette valeur minimum est nécessairement 0, comme on vient de le prouver; il existe donc une ou plusieurs valeurs de z de la forme $z = \alpha + 6\sqrt{-1}$, propres à vérifier l'équation $R = 0$ et par conséquent $F(x) = 0$.

On trouvera plus de détails sur les conditions nécessaires pour qu'une fonction u, d'un nombre quelconque de variables indépendantes, admette un maximum ou un minimum, dans le *Calcul différentiel* de M. Cauchy, 21[me] leçon.

SEIZIÈME LEÇON.

Suite des applications analytiques.

DEUXIÈME APPLICATION. *Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables, liées entre elles par plusieurs équations.*

78. Si les n variables x, y, z,... au lieu d'être indépendantes, comme on l'a supposé jusqu'ici, étaient liées entre elles par m équations $v=0$, $w=0$..., pour déduire de la méthode indiquée les maxima et les minima de la fonction $u=\mathrm{F}(x, y, z,...)$, il faudrait commencer par éliminer de cette fonction m variables différentes à l'aide des m équations données; après cette élimination les variables qui resteraient, au nombre de $n-m$, devraient être considérées comme indépendantes, et l'on égalerait, comme ci-dessus, du à 0, ou à l'infini, etc. Mais la recherche des maxima et des minima peut, dans ce cas, être beaucoup simplifiée.

En effet, différentions la fonction u en y conservant toutes les variables données x, y, z,... l'équation $du=0$ deviendra

$$(1) \qquad \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots = 0,$$

et renfermera les n différentielles dx, dy, dz... dont $n-m$ seulement sont réellement indépendantes, les

m autres pouvant être exprimées à l'aide des m équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz \ldots = 0, \\ &\frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz \ldots = 0, \ldots \text{ etc.} \end{aligned}\right.$$

Cela posé, l'équation $du = 0$ devant être vérifiée dans le cas du maximum ou du minimum, quelles que soient les différentielles des variables indépendantes, il est clair que si l'on élimine de cette équation un nombre m de différentielles à l'aide des formules (2), les coefficients des $m - n$ différentielles restantes devront être séparément égalés à o. Or, pour effectuer l'élimination, il suffit d'ajouter à l'équation $du = 0$ chacune des équations $dv = 0$, $dw = 0, \ldots$ multipliée par un facteur indéterminé $-\lambda$, $-\mu, \ldots$ et de choisir ces facteurs de manière à faire disparaître dans l'équation résultante les coefficients de m différentielles successives; comme d'ailleurs l'équation résultante sera de la forme

$$\left(\frac{du}{dx} - \lambda\frac{dv}{dx} - \mu\frac{dw}{dx} - \ldots\right)dx + \left(\frac{du}{dy} - \lambda\frac{dv}{dy} - \mu\frac{dw}{dy}\ldots\right)dy + \ldots = 0,$$

et comme, après avoir fait disparaître les coefficients de m différentielles, il faudra égaler encore à o ceux des différentielles restantes, il est permis de conclure que les valeurs de λ, μ, $\nu \ldots$ tirées de quelques-unes des formules

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dx} - \lambda\frac{dv}{dx} - \mu\frac{dw}{dx} - \ldots = 0, \\ &\frac{du}{dy} - \lambda\frac{dv}{dy} - \mu\frac{dw}{dy} - \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

devront satisfaire à toutes les autres; par conséquent les

valeurs de x, y, z,... propres à vérifier les équations $du = 0$, $dv = 0$,... ou propres à donner des maxima et des minima, devront satisfaire aux équations de condition que fournit l'élimination des indéterminées λ, μ, ν... entre les formules $\frac{du}{dx} - \lambda \frac{dv}{dx} \ldots = 0$, etc. Le nombre de ces équations de condition sera $n - m$; en les réunissant aux m équations $v = 0$, $w = 0$,... on obtiendra en tout n équations dont on déduira, pour les variables x, y, z, plusieurs systèmes de valeurs, parmi lesquelles se trouveront ceux qui pourront rendre maxima ou minima la fonction donnée $u = \mathrm{F}(x, y, z\ldots)$.

Nota. Les équations de condition produites par l'élimination de λ, μ, ν... resteront les mêmes quand on échangera entre elles, d'une manière quelconque, les fonctions u, v, w..., ou quand on remplacera ces fonctions par les suivantes $u - a$, $v - b$, $w - c$..., de sorte que la méthode précédente donnera toutes les valeurs propres à rendre maximum ou minimum non-seulement la fonction u, mais les fonctions v, w,...; $u - a$, $v - b$, $w - c$... Si les variables sont liées entre elles par une seule équation $v = 0$, les équations à l'aide desquelles on pourra éliminer λ deviendront

$$\frac{du}{dx} - \lambda \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} - \lambda \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} - \lambda \frac{dv}{dz} = 0 \ldots$$

On en conclut, par l'élimination de λ,

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{dv}{dy}} = \frac{\frac{du}{dz}}{\frac{dv}{dz}} = \text{etc.}$$

Cette dernière formule équivaut à $n - 1$ équations distinctes qui, réunies à l'équation $v = 0$, détermineront les valeurs cherchées de x, y, z.

79. 1er *Exemple*. $a, b, c, \ldots r$, étant des constantes, on demande le *maximum* de la fonction $u = ax + by + cz + \ldots$ en supposant les variables assujéties à vérifier l'équation

$$v = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - r^2 = 0.$$

On aura

$$\frac{du}{dx} = a, \; \frac{du}{dy} = b, \; \frac{du}{dz} = c, \ldots \; \frac{dv}{dx} = 2x, \; \frac{dv}{dy} = 2y, \; \frac{dv}{dz} = 2z, \ldots$$

et par suite

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \ldots = \frac{ax + by + cz + \ldots}{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots} = \frac{u}{r^2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots}},$$

donc

$$\frac{u}{r^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}}{r}, \quad u = \pm r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$$

On montrerait que de ces valeurs de u, l'une est un maximum et l'autre un minimum, en remarquant que l'on a

$$(ax + by + cz + \ldots)^2 + (bx - ay)^2 + (cx - az)^2 \ldots + (cy - bz)^2 \ldots$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots),$$

$$u^2 < (a^2 + b^2 + c^2 \ldots) r^2,$$

ce qui exige que des deux valeurs

$$u = \pm r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots},$$

l'une soit maximum et l'autre minimum.

2me *Exemple*. On demande le minimum de la fonction

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots,$$

en supposant que les variables x, y, z, soient liées entre elles par l'équation

$$ax + by + cz + \ldots - k = 0.$$

On aura encore

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\ldots=\frac{k}{u}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2\ldots}}{\sqrt{u}},\, u=\frac{k^2}{a^2+b^2+c^2+\ldots},$$

et l'on montrerait que cette valeur est un minimum.

Si les variables $x, y, z\ldots$ se réduisent à trois, et désignent des coordonnées rectangulaires, la valeur de $\sqrt{u}$ représentera la plus courte distance de l'origine à un plan fixe.

3me *Exemple*. On cherche le maximum de la fonction

$$u = x^p y^q z^r,$$

les variables x, y, z, étant assujéties à vérifier l'équation

$$u = ax + by + cz + \ldots - k = 0.$$

On aura

$$\frac{du}{dx} = px^{p-1}y^q z^r = \frac{p}{x}u, \quad \frac{du}{dy} = \frac{q}{y}u, \quad \frac{du}{dz} = \frac{r}{z}u\ldots,$$

$$\frac{dv}{dx} = a, \quad \frac{dv}{dy} = b, \quad \frac{dv}{dz} = c, \ldots$$

et par suite

$$\frac{p}{ax} = \frac{q}{by} = \frac{r}{cz} = \ldots = \frac{p+q+r+\ldots}{k}, \quad x = \frac{p}{a}\cdot\frac{k}{p+q+r\ldots},$$

$$y = \frac{q}{b}\cdot\frac{k}{p+q+r\ldots}, \quad z = \frac{r}{c}\cdot\frac{k}{p+q+r\ldots}.$$

On a encore

$$\frac{du}{u} = \frac{pdx}{x} + \frac{qdy}{y} + \frac{rdz}{z}\ldots,$$

$$\frac{d^2u}{u} - \left(\frac{du}{u}\right)^2 = -p\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - q\left(\frac{dy}{y}\right)^2 - r\left(\frac{dz}{z}\right)^2\ldots \quad \text{etc.};$$

et puisque les valeurs précédentes de $x, y, z, \ldots$ rendent du constamment nul, et d^2u constamment négatif, elles fourniront un maximum de la fonction u.

4[me] *Exemple*. On demande les demi-axes d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à son centre et représentée par l'équation

$$v = Ax^2 + Bxy + Cy^2 - K = 0.$$

Chacun de ces demi-axes sera un maximum ou un minimum de la fonction $r = u = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou du rayon vecteur mené de l'origine à la courbe. Cela posé, comme on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{y}{r}, \quad \frac{dv}{dx} = 2Ax + By, \quad \frac{dv}{dy} = 2Cy + Bx,$$

et par suite

$$\frac{x}{2Ax + By} = \frac{y}{2Cy + Bx} = \frac{x^2 + y^2}{x(2Ax + By) + y(2Cy + Bx)} = \frac{r^2}{2K},$$

$$\frac{2K}{r^2} - 2A = B\frac{y}{x}, \quad \frac{2K}{r^2} - 2C = B\frac{x}{y}, \quad \left(\frac{2K}{r^2} - 2A\right)\left(\frac{2K}{r^2} - 2C\right) = B^2;$$

les deux racines de cette équation seront les carrés des deux demi-axes qui seront tous deux réels si $AK > 0$, $B^2 - 4AC < 0$, mais dont l'un sera imaginaire, si $B^2 - 4AC > 0$.

Troisième application. *Développement des fonctions de plusieurs variables. Extension du théorème de Taylor à ces mêmes fonctions.*

80. Soit

$$u = F(x, y, z, \ldots)$$

une fonction de plusieurs variables indépendantes. Donnons à x, y, z, les accroissements

$$\Delta x = \alpha dx, \quad \Delta y = \alpha dy, \quad \Delta z = \alpha dz \ldots$$

Posons de plus

$$F(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \ldots) = f(\alpha), \text{ d'où } F(x, y, z, \ldots) = f(0);$$

nous aurons

$$F(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz,\ldots)-F(x,y,z,\ldots)=f(\alpha)-f(0)$$
$$=\alpha f'(0)+\frac{\alpha^2}{1.2}f''(0)\ldots+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}f^n(\theta\alpha).$$

Mais comme nous l'avons vu

$$f'(0)=du,\ f''(0)=d^2u,\ldots f^{n-1}(0)=d^{n-1}u,$$
$$f^n(\theta\alpha)=f^n(0)+I=d^nu+I,$$

I s'évanouissant avec α ou avec Δx, Δy, Δz, on aura donc

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z\ldots)=u+\alpha du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u\ldots$$
$$+\frac{\alpha^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}d^{n-1}u+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^nu+I).$$

Si nous remarquons que

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz+\text{etc.},$$
$$d^2u=\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2+\frac{d^2u}{dz^2}dz^2+\ldots+2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy$$
$$+2\frac{d^2u}{dxdz}dxdz+\text{etc.},$$

il viendra

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z\ldots)=u+\frac{du}{dx}\Delta x+\frac{du}{dy}\Delta y+\frac{du}{dz}\Delta z$$
$$\ldots\ldots+\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\Delta x^2+\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dy^2}\Delta y^2+\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dz^2}\Delta z^2$$
$$+\frac{1}{1.2}2\frac{d^2u}{dxdy}\Delta x\Delta y+\text{etc.}+\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^nu+I).$$

Si le terme ou le reste $\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}f^n(\theta\alpha)$ décroît indéfiniment à mesure que n augmente, ce qui arrivera, par exemple, si $f^n(\theta\alpha)$, qui est ce que devient d^nu quand on

y change $x, y, z\ldots$ en $x+\theta\alpha dx$, $y+\theta\alpha dy$, $z+\theta\alpha dz,\ldots$ conserve toujours une valeur finie, la série qui forme le second membre de l'équation précédente sera convergente, et l'on aura

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ldots)=u+\alpha du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u$$

$$+\frac{\alpha^3}{1.2.3}d^3u+\text{etc.}=u+\frac{du}{dx}\Delta x+\frac{du}{dy}\Delta y+\frac{du}{dz}\Delta z\ldots+\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\Delta x^2$$

$$+\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dy^2}\Delta y^2+\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dz^2}\Delta z^2+\ldots+\frac{2}{1.2}\frac{d^2u}{dxdy}\Delta x\Delta y+\text{etc.}$$

Si dans cette dernière équation on fait $\alpha=1$, on aura

$$F(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ldots)=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\ldots$$

Cette équation et celle qu'on en déduit en remplaçant x, y, $z,\ldots$ par zéro, dx, dy, $dz,\ldots$ par x, y, $z,\ldots$ fournissent le moyen d'étendre les théorèmes de Taylor et de Maclaurin aux fonctions de plusieurs variables.

S'il arrive que pour certaines valeurs de x, y, z, les différentielles du, $d^2u,\ldots$ $d^{n-1}u$, s'évanouissent toutes, on aura

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-F(x,y,z)=\Delta u=\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}(d^nu+I).$$

Cette dernière formule comprend la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

Caractère général de la convergence des séries. — Limite des restes ou des erreurs que l'on commet en s'arrêtant à un terme quelconque de ces séries.

---

81. M. Cauchy a été assez heureux, dans ces dernières années, pour démontrer un théorème vraiment remarquable qui donne immédiatement les règles de la convergence des séries fournies par le développement des fonctions explicites, et réduit simplement la loi de convergence à la loi de continuité des fonctions. Je vais donner une idée de ces importantes recherches, après avoir rappelé une propriété remarquable des racines de l'unité, ou des racines de l'équation $x^n = 1$, et établi quelques lemmes fondamentaux faciles à déduire des premiers principes du calcul différentiel.

Comme on l'a vu, toutes les racines de l'unité sont renfermées dans la formule

$$((1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\pm\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}.$$

Posons, pour abréger, $\theta = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$, et nommons m, m' deux quantités entières positives ou négatives, mais tellement choisies, que la différence $m' - m$ ne soit pas divisible par n; les expressions

$$\theta^m = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}}, \quad \theta^{m'} = e^{\frac{2m'\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

seront deux racines $n^{ièmes}$ de l'unité, distinctes l'une de l'autre, puisque la différence

$$e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}} - e^{\frac{2m'\pi}{n}\sqrt{-1}} = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}}\left[1 - e^{\frac{2(m'-m)\pi}{n}\sqrt{-1}}\right]$$

ne peut s'évanouir qu'autant que $\frac{m'-m}{n}$ est un nombre entier. Il en résulte, 1° que ces deux expressions seront certainement deux racines $n^{ièmes}$ de l'unité, distinctes l'une de l'autre, si la différence $m'-m$ est inférieure à n; 2° que pour obtenir toutes les racines de l'unité du degré n, il suffit de prendre n termes consécutifs de la progression géométrique,

$$\ldots\ \theta^{-3},\ \theta^{-2},\ \theta^{-1},\ 1,\ \theta^{1},\ \theta^{2},\ \theta^{3}, \text{etc.}, \ldots$$

indéfiniment prolongée dans les deux sens, par exemple, les termes $1, \theta, \theta^2, \theta^3, \ldots \theta^{n-1}$.

Corollaire 1er. La somme S des $m^{ièmes}$ puissances des n racines de l'unité est égale à 0, excepté lorsque le nombre m est un multiple de n, et dans ce cas, la somme S est égale à n.

En effet, la somme de ces $m^{ièmes}$ puissances sera toujours égale à

$$1^m + \theta^m + \theta^{2m} + \theta^{3m} \ldots + \theta^{m(n-1)} = \frac{\theta^{mn}-1}{\theta^m-1}.$$

Or le numérateur étant nécessairement égal à 0, la somme S s'évanouira toujours, à moins que le dénominateur ne soit nul lui-même, ce qui n'arrivera qu'autant que m sera de la forme $m'n$; et comme dans ce cas la véritable valeur de la fraction $\frac{\theta^{mn}-1}{\theta^m-1}$ est $\frac{mn}{m} = n$, on aura $S = n$. Il importe peu d'ailleurs que m soit positif ou négatif; et en effet, une puissance négative de θ peut toujours être

remplacée par une puissance positive, car on a $\theta^{-m}=\frac{1}{\theta^m}$, et en désignant par $m'n$ le multiple de n le plus voisin de m,

$$\theta^{-m}=\frac{1}{\theta^m}=\frac{\theta^{m'n}}{\theta^m}=\theta^{m'n-m}.$$

82. *Lemme.* Soit $x=re^{t\sqrt{-1}}$ une variable imaginaire dont r soit le module, et t l'argument; soit encore $f(x)$ une fonction de la variable x qui reste finie et continue, ainsi que sa dérivée $f'(x)$, pour des valeurs du module r comprises entre certaines limites $r=r_0$, $r=\mathrm{R}$; enfin nommons n un nombre entier susceptible de croître indéfiniment, et prenons $\theta=e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$, θ représentera une racine primitive de l'équation $x^n=1$; dès-lors, si en attribuant à r l'une quelconque des valeurs comprises entre les limites r_0, R, on pose

$$\frac{f'(r)+\theta f'(\theta r)+\theta^2 f'(\theta^2 r)\ldots+\theta^{n-1}f'(\theta^{n-1}r)}{n}=M,$$

M s'évanouira pour de très grandes valeurs de n, et par conséquent la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs du produit $\theta^m f'(\theta^m r)$ correspondantes aux valeurs $0, 1, 2, \ldots (n-1)$, du nombre m, se réduira sensiblement à 0.

Démonstration. Si l'on appelle h un accroissement attribué à une valeur réelle ou imaginaire de x, dans le voisinage de laquelle la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ restent finies et continues, on aura

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\mathrm{I}],$$

I devant s'évanouir avec h. En faisant tour à tour, dans cette équation,

$$x+h=\theta r,\quad x=r,\quad h=r(\theta-1),$$

$$x+h=\theta^2 r, \quad x=\theta r, \quad h=r\theta(\theta-1) \ldots \text{ etc.},$$

. . . .

$$x+h=\theta^n r, \quad x=\theta^{n-1} r, \; h=\theta^{n-1} r(\theta-1),$$

on trouvera

$$f(\theta r)-f(r)=(\theta-1)\,r\,[f'(r)+I_1],$$
$$f(\theta^2 r)-f(\theta r)=(\theta-1)\,r\,[\theta f'(\theta r)+I_2],$$

. . . .

$$f(\theta^n r)-f(\theta^{n-1} r)=(\theta-1)\,r\,[\theta^{n-1} f'(\theta^{n-1} r)+I_n].$$

Les quantités $I_1, I_2, \ldots I_n$ devant s'évanouir avec $\theta-1$, ou, ce qui revient au même, avec $\frac{1}{n}$, puisque, en vertu de l'équation $\theta=e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$, θ ne sera égal à l'unité que quand n sera égal à l'infini, ou $\frac{1}{n}$ à o.

En ajoutant toutes ces équations et désignant par I_0 la moyenne arithmétique $\frac{I_1+I_2+I_3\ldots+I_n}{n}$, moyenne qui devra évidemment s'évanouir elle-même avec $\frac{1}{n}$, on trouvera

$$\frac{f(\theta^n r)-f(r)}{(\theta-1)r}=f'(r)+\theta f'(\theta r)+\theta^2 f'(\theta^2 r)\ldots\ldots\ldots$$
$$+\theta^{n-1} f'(\theta^{n-1} r) \cancel{+I_0,} + n I_0,$$

mais

$$\theta^n=1, \quad f(\theta^n r)=f(r), \quad f(\theta^n r)-f(r)=0,$$

donc

$$\frac{f'(r)+\theta f'(\theta r)+\theta^2 f'(\theta^2 r)\ldots+\theta^{n-1} f'(\theta^{n-1} r)}{n}=-I_0.$$

Or I_0 s'évanouit quand n est infini, donc, etc.

83. *Corollaire* 1[er]. La moyenne

$$\frac{f'(r)+\theta f'(\theta r)+\theta^2 f'(\theta^2 r)\ldots+\theta^{n-1} f'(\theta^{n-1} r)}{n}$$

est la dérivée de cette autre quantité

$$\frac{f(r)+f(\theta r)+f(\theta^2 r)\ldots+f(\theta^{n-1}r)}{n},$$

donc, si pour de très grandes valeurs de n la première moyenne ou la dérivée est sensiblement nulle, la seconde, ou la quantité elle-même, sera sensiblement constante, car il n'y a qu'une quantité constante qui puisse avoir une dérivée nulle. Si donc on pose

$$F(r)=\frac{f(r)+f(\theta r)+f(\theta^2 r)\ldots+f(\theta^{n-1}r)}{n},$$

on aura sensiblement, pour de très grandes valeurs de n,

$$F(\mathrm{R})=F(r_0).$$

$F(r)$ n'est autre chose que la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de la fonction $f(x)$ qui correspondent à un même module r de la variable x, et à des valeurs de $\frac{x}{r}$ représentées par les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. La limite vers laquelle converge cette moyenne arithmétique tandis que le nombre n croît indéfiniment, est ce qu'on pourrait appeler *la valeur moyenne de la fonction $f(x)$ pour le module donné r de la variable x.* En admettant cette définition, on déduit immédiatement de ce qui précède la proposition suivante : Si la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ restent finies et continues pour un module r de x renfermé entre les limites r_0, R, la valeur moyenne de $f(x)$ correspondante au module r supposé compris entre les limites r_0, R, sera indépendante de ce module.

Corollaire 2me. Si $r_0=0$, c'est-à-dire si la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ restent continues pour toutes les valeurs de x dont le module est renfermé entre les valeurs 0 et R, on aura sensiblement pour un semblable

module et pour de très grandes valeurs de n, $F(r)=F(0)$; et si $F(0)=0$, ce qui aura lieu si la fonction $f(x)$ s'évanouissait avec x, $F(r)=0$.

84. Théorème 1er. Si l'on attribue à la variable x un module inférieur au plus petit de ceux pour lesquels une des deux fonctions $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}'(x)$, cesse d'être finie et continue, la fonction $\mathrm{F}(x)$ pourra être représentée par la valeur moyenne du produit $\frac{z}{z-x}\mathrm{F}(z)$, correspondante à un module r de z qui surpasse le module donné de x, et sera par conséquent développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x.

Démonstration. Posons

$$f(z)=\frac{\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(x)}{z-x}z,$$

$\mathrm{F}(z)$ désignant une fonction de z qui reste finie et continue avec sa dérivée $\mathrm{F}'(z)$, pour un module r de z compris entre les limites 0 et R. La quantité $F(z)$ définie par l'équation

$$F(z)=\frac{f(z)+f(\theta z)+\ldots+f(\theta^{n-1}z)}{n},$$

s'évanouira ainsi que $f(z)$ pour une valeur nulle de z, et si, en posant pour abréger

$$\varphi(z)=\frac{z}{z-x}\mathrm{F}(z),\quad \chi(z)=\frac{z}{z-x}\mathrm{F}(x),$$

on nomme $\Phi(z)$, $\mathrm{X}(z)$, ce que devient $F(z)$ quand on remplace $f(z)$ par $\varphi(z)$ ou par $\chi(z)$, on aura

$$F(z)=\Phi(z)-\mathrm{X}(z).$$

De plus, pour de très grandes valeurs de n et pour un

module r de z inférieur à R, on aura, en vertu du dernier corollaire, puisque $F(\text{o}) = \text{o}$,

$$F(r) = \Phi(r) - \mathrm{X}(r) = \text{o}, \quad \Phi(r) = \mathrm{X}(r)\,;$$

d'autre part, si l'on suppose le module de z supérieur au module de x, la fraction $\frac{z}{z-x}$, sera développable en série convergente, et l'on aura

$$\frac{z}{z-x} = z(z-x)^{-1} = 1 + z^{-1}x + z^{-2}x^2 + \text{etc.},$$

et par suite

$$\chi(z) = \frac{z}{z-x}\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(x)(1 + z^{-1}x + z^{-2}x^2 + \text{etc.}),$$

$$\mathrm{X}(r) = \frac{\mathrm{F}(x)}{n}\left[\begin{array}{l} n + r^{-1}x(1 + \theta^{-1} + \theta^{-2} + \theta^{-3} + \text{etc.}) \\ + r^{-2}x^2(1 + \theta^{-2} + \theta^{-4} + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{array}\right].$$

Les coefficients de $r^{-1}x$, $r^{-2}x^2$, etc., sont la somme des racines de l'unité élevées chacune à la puissance -1, ou à la puissance -2, -3, etc., somme que nous avons prouvé être égale à o; on aura donc

$$\mathrm{X}(r) = \mathrm{F}(x),$$

et à cause de l'équation $\Phi(r) = \mathrm{X}(r)$,

$$\mathrm{F}(x) = \Phi(r) = \frac{1}{n}\left[\frac{r}{r-x}\mathrm{F}(r) + \frac{\theta r}{\theta r - x}\mathrm{F}(\theta r) \ldots + \frac{\theta^{n-1}}{\theta^{n-1}r - x}\mathrm{F}(\theta^{n-1}r)\right].$$

En vertu de cette dernière équation, qui devient rigoureuse quand n devient infini, la fonction $\mathrm{F}(x)$ pourra généralement être représentée par la valeur moyenne du produit $\frac{z}{z-x}\mathrm{F}(z)$ correspondante au module r de la variable z; pourvu toutefois, comme on l'a déjà supposé, que cette fonction $\mathrm{F}(z)$ et sa dérivée $\mathrm{F}'(z)$ restent finies et continues pour ce module de z, ou pour un module

plus petit. D'ailleurs la fraction $\frac{z}{z-x}$, et par suite le produit $\frac{z}{z-x}F(z)$, seront, pour un module de x inférieur au module r de z, développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x; on pourra donc en dire autant du second membre de l'équation qui donne $F(x)$, et par conséquent de $F(x)$. Donc, etc.

De ce théorème on déduit immédiatement la proposition suivante.

85. Théorème 2e. Une fonction quelconque réelle ou imaginaire d'une variable réelle ou imaginaire x sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, tant que le module de x conservera une valeur inférieure à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être finie et continue.

Ainsi, en particulier, puisque les fonctions

$$\cos x,\quad \sin x,\quad e^x,\quad e^{x^2},\quad \cos(1-x^2),\ \text{etc.},\ldots\ldots$$

et leurs dérivées du premier ordre ne cessent jamais d'être finies et continues, elles seront toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x; au contraire, comme les fonctions

$$(1+x)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{1}{1-x},\quad (1+x)^{\pm\frac{m}{n}},\quad \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},$$
$$l(1+x),\quad \text{arc tang}\, x,$$

et leurs dérivées du premier ordre cessent d'être fonctions continues de x au moment où le module de cette variable devient égal à l'unité; elles seront certainement développables en séries convergentes ordonnées suivant les puis-

sances ascendantes de la variable x, si la valeur réelle ou imaginaire de x offre un module inférieur à l'unité. Ces séries, au contraire, pourront devenir et deviendront en effet divergentes, si le module de x surpasse l'unité. Enfin, comme les fonctions

$$lx, \quad e^{\frac{1}{x}}, \quad e^{\frac{1}{x^2}}, \quad \cos\frac{1}{x}, \text{ etc.},$$

deviennent discontinues avec leurs dérivées du premier ordre pour une valeur nulle de x, par conséquent, lorsque le module de x est le plus petit possible, elles ne seront jamais développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.

On sera peut-être étonné de voir placer la fonction arc tang x au nombre des fonctions qui deviennent infinies ou discontinues quand le module de x devient égal à 1 : il est vrai que si l'on attribue à x une valeur réelle, la fonction arc tang x ne cesse pas d'être finie et continue; mais il n'en sera plus de même si, x devenant imaginaire, on suppose, par exemple,

$$x = \alpha\sqrt{-1}.$$

Alors, en effet, la fonction

$$\text{arc tang } x = \text{arc tang}\left(\alpha\sqrt{-1}\right) = \frac{l(1-\alpha) - l(1+\alpha)}{2\sqrt{-1}},$$

deviendra évidemment infinie et discontinue ainsi que sa dérivée $\frac{1}{1+x^2}$, quand on fera

$$\alpha = 1 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{-1}.$$

Les fonctions ci-dessus prises pour exemple, et leurs dérivées du premier ordre, deviennent toujours infinies ou discontinues pour les mêmes valeurs du module de la variable indépendante : si l'on était assuré qu'il en fût toujours ainsi, on pourrait, dans le théorème énoncé, se

dispenser de parler de la fonction dérivée, mais on n'a point à cet égard une certitude suffisante.

86. La méthode que nous venons d'exposer est d'autant plus remarquable, qu'on peut même en déduire et la série de Maclaurin, et le reste de cette série.

Nous avons vu, en effet, que la fonction $F(x)$ pourra être généralement représentée par la valeur moyenne du produit $\frac{z}{z-x}F(z)$; or on a

$$\frac{z}{z-x}F(z) = F(z) + \frac{x}{z}F(z) + \frac{x^2}{z^2}F(z) + \text{etc.}$$

Donc, dans le développement de $F(x)$ le terme constant devra se réduire à la valeur moyenne de $F(z)$, ou, en vertu du lemme fondamental, à $F(0)$, puisque, par hypothèse, la fonction $F(z)$ est continue entre les limites 0 et R. De même, le coefficient de x sera égal à la valeur moyenne du rapport $\frac{F(z)}{z}$, ou, ce qui revient au même, du rapport $\frac{F(z)-F(0)}{z}$, car la valeur moyenne

$$F(0)\,r^{-1}(1+\theta^{-1}+\theta^{-2}+u \text{ etc.})$$

de la quantité $\frac{F(0)}{z}$ est nulle, en vertu des propriétés des racines de l'unité. D'ailleurs la valeur moyenne du rapport $\frac{F(z)-F(0)}{z}$, est égale à la valeur $F'(0)$ qu'il prend quand on y fait $z=0$. On montrerait de la même manière que le coefficient de x^2, valeur moyenne du rapport $\frac{F(z)}{z^2}$ ou, ce qui revient au même, n° 81, corollaire 1er, du rapport

$$\frac{F(z)-F(0)-zF'(0)}{z^2},$$

est égale à $\frac{F''(0)}{1.2}$, et l'on trouvera définitivement

$$F(z) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \text{etc.}$$

Quant au reste qui devra compléter cette série, réduite à ses n premiers termes, on le déterminera facilement comme il suit : en effet, puisqu'on aura

$$\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} \ldots + \frac{x^{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{x^n}{z^{n-1}(z-x)},$$

et par suite

$$\frac{z}{z-x} F(z) = F(z) + \frac{x}{z} F(z) + \frac{x^2}{z^2} F(z) \ldots + \frac{x^n}{z^{n-1}(z-x)} F(z),$$

il est clair que le reste dont il s'agit sera la valeur moyenne du produit $\frac{x^n}{z^{n-1}(z-x)} F(z)$, considéré comme fonction de z, pour un module r de z supérieur au module donné de x. Donc si l'on nomme R le plus grand des modules de $F(z)$ correspondants au module r de z, et ρ le module attribué à la variable x, le reste de la série de Maclaurin aura pour module un nombre inférieur au produit $\frac{\rho^n}{r^{n-1}(r-\rho)} R$, et par conséquent inférieur au reste de la progression géométrique que l'on obtient en développant suivant les puissances ascendantes de x, le rapport $\frac{rR}{r-\rho}$.

En résumant ce qu'on vient de dire, on obtient la proposition suivante :

87. Théorème 4[e]. La fonction $F(x)$ sera développable par la formule de Maclaurin en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une

valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction cesse d'être finie et continue. Soit r cette dernière valeur, ou une valeur plus petite, ρ le module de x, et R le module maximum de $F(x)$, les modules du terme général et du reste de la série de Maclaurin, seront respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme $\frac{rR}{r-\rho}$, et dont le reste est

$$\frac{\rho^n}{r^{n-1}(r-\rho)}R=\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1}\frac{\rho R}{r-\rho}.$$

Les principes ci-dessus exposés, et les divers théorèmes que nous venons d'établir, peuvent être immédiatement étendus et appliqués à des fonctions de plusieurs variables; on arriverait ainsi, par exemple, au théorème suivant.

Théorème 5[e]. Soient $x, y, z,\ldots$ plusieurs variables, réelles ou imaginaires, la fonction $F(x, y, z\ldots)$ sera développable par la formule de Maclaurin, étendue au cas de plusieurs variables, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, y, z\ldots$, si les modules de ces variables conservent des valeurs inférieures à celles pour lesquelles la fonction reste finie et continue. Soient r, r', $r''\ldots$, ces dernières valeurs ou des valeurs plus petites, R le plus grand des modules de $F(x, y, z\ldots)$ correspondants au module r de x, au module r' de y, au module r'' de z, ρ, ρ', ρ'',... les modules de $x, y, z\ldots$; les modules du terme général et du reste de la série en question, seront respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste de la série qui a pour somme le produit

$$R\,\frac{r}{r-\rho}\cdot\frac{r'}{r'-\rho'}\cdot\frac{r''}{r''-\rho''}\cdots\cdots$$

DIX-HUITIÈME LEÇON.

Développement des fonctions implicites. — Série de Lagrange.

88. Les principes établis dans la leçon précédente peuvent être appliqués au développement des fonctions implicites, par exemple de celles qui représentent les racines des équations algébriques ou transcendantes. Alors la loi de convergence se réduit encore à la loi de continuité. Concevons pour fixer les idées, qu'il s'agisse de développer la plus petite racine de l'équation

$$(1) \qquad y = xf(y)$$

dans laquelle $f(y)$ est une fonction explicite et donnée de y qui ne renferme point x, et qui ne devient ni nulle, ni infinie pour $y=0$. Parmi les racines de cette équation il en existe évidemment une qui s'évanouit en même temps que x, et qui, si l'on fait croître x par degrés insensibles, variera elle-même insensiblement, ainsi que sa dérivée relative à x, en restant toujours fonction continue de x, jusqu'à ce que cette variable acquière une valeur pour laquelle deux racines de l'équation $y = xf(y)$ deviennent égales (*), pourvu toutefois que dans l'intervalle, la

(*) On dit qu'une équation $F(y) = 0$, a m racines égales à b, lorsqu'on a $F(y) = (y-b)^m \mathrm{f}(y)$, $\mathrm{f}(y)$ étant une fonction de y qui ne devient ni nulle, ni infinie pour $y = b$; comme on a d'ailleurs

$$F(y) = F(b) + (y-b)F'_y(b) + \frac{(y-b)^2}{1.2}F''_y(b)\ldots + \frac{(y-b)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}F^{m-1}_y(b) + \frac{(y-b)^m}{1.2.3\ldots m}F^m_y[b+\theta(y-b)],$$

l'équation $F(y) = 0$ ne pourra avoir m racines égales à b, ou $F(y)$ ne

valeur de $f(y)$ correspondante à la racine dont il s'agit, ne cesse pas d'être continue. Donc, si la fonction $f(y)$ reste continue pour des valeurs quelconques de x, celle des racines de l'équation, $y = xf(y)$, qui s'évanouit avec x, sera développable en série convergente, suivant les puissances ascendantes de x, pour tout module de cette variable inférieur au plus petit de ceux qui introduisent des racines égales dans l'équation (1), en rendant ces racines communes à cette équation et à sa dérivée prise par rapport à y, $1 = x f'(y)$; et par conséquent pour tout module de x inférieur au plus petit de ceux qui répondent aux équations simultanées $x = \frac{y}{f(y)}$, $\frac{f(y)}{y} = f'(y)$. Ainsi, par exemple, la plus petite racine de l'équation $y = x \cos y$ sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x pour tout module de x inférieur au plus petit de ceux qui répondent aux équations simultanées $x = \frac{y}{\cos y}$ et

---

pourra être de la forme $(y-b)^m \mathrm{f}(y)$ qu'autant que l'on aura

$$\mathrm{F}(b)=0, \quad \mathrm{F}'_y(b)=0, \quad \mathrm{F}''_y(b)=0 \ldots \mathrm{F}^{m-1}_y(b)=0.$$

De sorte que la racine multiple b est nécessairement commune à l'équation $\mathrm{F}(y)=0$, et à ses dérivées jusqu'à celles de l'ordre $m-1$ inclusivement. Si $m=2$, c'est-à-dire si la racine b est double, elle devra vérifier à la fois les deux équations $\mathrm{F}(y)=0$, $\mathrm{F}'_y(y)=0$.

De plus, si $\mathrm{F}(y)$ est une fonction implicite de x, si, par exemple, y est lié avec x par l'équation $y = xf(y)$, on aura

$$\mathrm{F}'_x(y) = \frac{d\mathrm{F}(y)}{dx} = \frac{d\mathrm{F}(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}'_y(y) \cdot y'_x, \quad y'_x = \frac{\mathrm{F}'_x(y)}{\mathrm{F}'_y(y)},$$

et l'on en conclura que si à une certaine valeur de x correspond une racine double de l'équation $\mathrm{F}(y)=0$, la valeur correspondante de y'_x sera, en général, infinie et discontinue, puisque $\mathrm{F}'_y(b)=0$, et par conséquent y ne sera plus développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de x.

$\frac{\cos y}{y} = -\sin y$ ou $\cot y = -y$; or on prouve que ce plus petit module qui correspond à la racine imaginaire $y = 1,199678\ldots\sqrt{-1}$ de l'équation $\cot y = -y$, sera 0,662742, et par conséquent la plus petite racine de l'équation $y = x\cos y$ sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x pour tout module de x inférieur au nombre 0,662742; on se trouve ainsi ramené immédiatement à un résultat auquel Laplace est parvenu, par des calculs assez longs, dans son Mémoire sur la convergence de la série que fournit le développement du rayon vecteur d'une planète, suivant les puissances ascendantes de l'excentricité.

89. Pour développer cette plus petite racine y, ou la racine qui s'évanouit avec x, et que nous supposerons être une racine simple, appelons-la y_0, et posons

$$y - xf(y) = (y - y_0)\varphi(y),$$

$\varphi(y)$ sera une fonction de y qui, ainsi que $f(y)$, ne deviendra ni nulle, ni infinie pour $y = 0$. En différentiant cette équation par rapport à y, on trouve

$$1 - xf'(y) = (y - y_0)\varphi'(y) + \varphi(y),$$

et en divisant membre à membre,

$$\frac{1 - xf'(y)}{y - xf(y)} = \frac{1}{y - y_0} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)},$$

$$(2) \qquad \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{1 - xf'(y)}{y - xf(y)} - \frac{1}{y - y_0}.$$

D'ailleurs, pour des valeurs suffisamment petites de y, la fonction $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$, qui ne devient pas infinie pour $y = 0$, sera généralement développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes entières et positives de y. On aura, par exemple,

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \text{etc.}$$

Ainsi, en particulier, si $\varphi(y)$ est une fonction entière de y, et si l'on nomme b', b'', b'''... les racines, supposées inégales, de l'équation $\varphi(y)=0$, on aura identiquement

$$\varphi(y) = B(y-b')(y-b'')\ldots$$

B désignant un coefficient indépendant de y, et par suite

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{1}{y-b'} + \frac{1}{y-b''} + \text{etc.} = (y-b')^{-1} + (y-b'')^{-1} + \ldots$$

Pour tout module de y inférieur aux racines b', b'', etc., chacun des termes du second membre sera développable en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de y, et l'on aura

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = -\left(\frac{1}{b'} + \frac{1}{b''} + \text{etc.}\ldots\right) - \left(\frac{1}{b'^2} + \frac{1}{b''^2} + \ldots\right) y - \text{etc.}$$

Il faudra donc que le second membre de l'équation (2) soit lui-même développable, pour des modules de y qui ne dépassent pas certaines limites, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes entières et positives de y. Or il semble au premier abord que pour de très petits modules de x, ou, ce qui revient au même, pour de très petits modules de y_0, ce développement ne puisse s'effectuer, car si le module de y_0 devient inférieur à celui de y, et le module de x inférieur à celui de $\frac{y}{f(y)}$, les deux fonctions

$$\frac{1}{y-y_0} = (y-y_0)^{-1} = y^{-1}\left(1-\frac{y_0}{y}\right)^{-1},$$

$$\frac{1}{y-xf(y)} = [y-xf(y)]^{-1} = y^{-1}\left(1-\frac{x}{\frac{y}{f(y)}}\right)^{-1},$$

pourront être développées suivant les puissances ascen-

dantes de y_0 et de x et renfermeront des puissances négatives de y, on aura en effet, dans cette hypothèse,

$$\frac{1}{y-y_0}=\frac{1}{y}+\frac{y_0}{y^2}+\frac{y_0^2}{y^3}+\text{etc.}$$

De plus, en désignant par les notations D_y, D_y^2, D_y^3,... les dérivées successives prises par rapport à y, on aura

$$\frac{1-xf'(y)}{y-xf(y)}=\frac{D_y[y-xf(y)]}{y-xf(y)}=D_y l[y-xf(y)],$$

et parce que

$$l[y-xf(y)]=ly-x\frac{f(y)}{y}-\frac{x^2}{2}\left[\frac{f(y)}{y}\right]^2-\frac{x^3}{3}\left[\frac{f(y)}{y}\right]^3-\text{etc.},$$

on aura

$$\frac{1-xf'(y)}{y-xf(y)}=\frac{1}{y}-xD_y\frac{f(y)}{y}-\frac{x^2}{2}D_y\left[\frac{f(y)}{y}\right]^2-\frac{x^3}{3}D_y\left[\frac{f(y)}{y}\right]^3-\text{etc.}$$

Enfin, si l'on représente généralement par les notations $Y_{(0)}$, $D_yY_{(0)}$, $D_y^2Y_{(0)}$, ce que deviennent une fonction quelconque Y de y et ses dérivées quand, après la différentiation, on y fait $y=0$, et si l'on pose $f(y)=Y$, on trouvera encore, en vertu de la formule de Maclaurin,

$$Y=Y_{(0)}+\frac{y}{1}D_yY_{(0)}+\frac{y^2}{1.2}D_y^2Y_{(0)}+\text{etc.},\ldots$$

$$Y^2=Y_{(0)}^2+\frac{y}{1}D_yY_{(0)}^2+\frac{y^2}{1.2}D_y^2Y_{(0)}^2+\text{etc.}\ldots,$$

et par suite

$$D_y\frac{f(y)}{y}=D_y\frac{Y}{y}=-\frac{Y_{(0)}}{y^2}+\frac{1}{1.2}D_y^2Y_{(0)}+\text{etc.}\ldots$$

$$D_y\left[\frac{f(y)}{y}\right]^2=D_y\frac{Y^2}{y^2}=-2\frac{Y_{(0)}^2}{y^3}-\frac{1}{1}\frac{D_yY_{(0)}^2}{y^2}+\frac{1}{1.2.3}D_y^3Y_{(0)}^2+\text{etc.}$$

Si l'on a égard à ces diverses valeurs, on verra que le second membre de l'équation

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\frac{1-xf'(y)}{y-xf(y)}-\frac{1}{y-y_0},$$

renferme, en apparence du moins, un nombre infini de puissances négatives de y, tandis que le développement du premier membre est une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de y. L'égalité entre ces deux membres doit cependant subsister, et en les comparant on doit obtenir un certain nombre d'équations plus ou moins importantes. Pour établir cette comparaison avec plus de succès, faisons les deux remarques suivantes: 1° Puisque les modules de y_0 et de x s'évanouissent ensemble, on pourra, en supposant le module de y_0 très petit, concevoir que x, x^2..., x^m, et par suite $\frac{1-xf'(y)}{y-xf(y)}$ soient développés suivant les puissances ascendantes de y_0; dès lors le second membre de l'équation

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\frac{1-xf'(y)}{y-xf(y)}-\frac{1}{y-y_0},$$

développé suivant les puissances ascendantes de y et de y_0, offrira, il est vrai, des puissances positives et négatives de y, mais seulement des puissances positives de y_0, et l'on voit immédiatement que dans ce second membre le coefficient d'une puissance positive quelconque de y_0, par exemple de y_0^m, sera la somme S_m d'une série qui renfermera un nombre infini de puissances positives de y, avec les seules puissances négatives $\frac{1}{y^{m+1}}$, $\frac{1}{y^m}$, .. $\frac{1}{y}$ qui proviennent et du développement de $(y-y_0)^{-1}$, et des coefficients de x, x^2, x^3...x^m. 2° En vertu des principes établis dans la leçon précédente, la fonction $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$ sera dévelop-

pable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de y et de y_0, tant que les modules de y et de y_0 ne dépasseront pas les limites au-delà desquelles cette fonction cesse d'être continue, et le coefficient de y_0^m dans ce développement, déduit de la formule de Maclaurin, sera la somme S'_m d'une série qui renfermera seulement des puissances entières et positives de y. Cela posé, deux développements ordonnés suivant les puissances entières et positives d'une même variable y_0, ne pouvant être égaux qu'autant qu'il y a égalité entre les coefficients des mêmes puissances, les deux coefficients de y_0^m que nous avons désignés par S_m, S'_m, et qui représentent les sommes de deux séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de y, seront égaux. D'où il résulte que dans la première de ces deux séries chacun des $m+1$ premiers termes proportionnels à des puissances négatives de y devra s'évanouir. Donc, en particulier, le terme proportionnel à $\frac{1}{y^2}$, s'évanouira dans la série dont la somme S_m sert de coefficient à y_0^m, quel que soit d'ailleurs le nombre m, d'où il résulte que la somme des termes proportionnels à $\frac{1}{y^2}$ s'évanouira elle-même dans le second membre de l'équation

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{1 - xf'(y)}{y - xf(y)} - \frac{1}{y - y_0},$$

développé suivant les puissances ascendantes de y et de y_0. Or, en vertu des équations qui donnent les diverses parties de ce développement, cette somme est

$$xY_{(0)} + \frac{x^2}{1.2} D_y Y^2_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3} D_y^2 Y^3_{(0)} + \ldots - y_0,$$

on aura donc

$$y_0 = xY_{(0)} + \frac{x^2}{1.2} D_y Y^2_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3} D_y^2 Y^2_{(0)} + \text{etc.}$$

Cette dernière formule, qui subsiste tant que y_0 et sa dérivée relative à x restent fonctions continues de x, est précisément la formule donnée par Lagrange pour le développement de y_0 suivant les puissances ascendantes de x; formule qui est d'une extrême utilité dans la solution d'un grand nombre de problèmes importants. Si l'on égalait à zéro, non plus le coefficient de $\frac{1}{y^2}$, mais ceux de $\frac{1}{y^3}$, de $\frac{1}{y^4}$, etc., on obtiendrait immédiatement les formules données par Lagrange pour le développement de y_0^2, y_0^3..., suivant les puissances ascendantes de x. Enfin, si l'on égalait les coefficients des puissances positives y, y^2... à ceux qui affectent les mêmes puissances dans le second membre de l'équation

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = -\left(\frac{1}{b'}+\frac{1}{b''}+\text{etc}\ldots\right)-\left(\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{b''^2}+\text{etc.}\right)y-\text{etc.},$$

qui donne le développement de $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$ quand l'équation $\varphi(y)=0$ est une équation entière dont les racines sont b', b'', etc., on obtiendrait les valeurs des sommes

$$\frac{1}{b'}+\frac{1}{b''}+\ldots,\quad \frac{1}{b'^2}+\frac{1}{b''^2}+\ldots,$$

développées encore suivant les puissances ascendantes entières et positives de x.

Soit maintenant $F(y)$ une fonction qui ne devienne pas infinie pour $y=0$, après avoir multiplié par le rapport $\frac{F(y)-F(0)}{y}$ les deux membres de l'équation

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\frac{1-xf'(y)}{y-xf(y)}-\frac{1}{y-y_0},$$

on pourra, tant que la fonction $F(y)$ ne deviendra pas discontinue, développer le second membre suivant les

puissances ascendantes de y; et comme dans ce développement le coefficient de $\frac{1}{y^2}$ devra disparaître, on en conclura facilement

$$F(y_0)=F_{(0)}+xY_{(0)}F'(y)_{(0)}+\frac{x^2}{1.2}D_y[Y^2F'(y)]_{(0)}$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}D_y^2[Y^3F'(y)]_{(0)}+\cdots$$

On retrouve encore ici la formule donnée par Lagrange pour le développement de $F(y_0)$.

90. Quand, en suivant la marche que nous avons indiquée, marche tracée récemment par M. Cauchy, et seule réellement rigoureuse, on a démontré, 1° la possibilité et l'existence du développement d'une fonction implicite; 2° les valeurs entre lesquelles les variables doivent se renfermer pour que le développement subsiste, on peut, par des méthodes plus ou moins élégantes, déterminer la valeur des coefficients. Supposons, par exemple, qu'étant donnée une fonction implicite y de x déterminée par l'équation

$$y=xf(y)+z=xY+z,$$

on demande de développer y ou une fonction quelconque $F(y)$ de y suivant les puissances ascendantes de x et de z, ou de l'une de ces variables, de x par exemple. Si l'on représente par a une valeur particulière de x, par $F_{(a)}$, $D_xF_{(a)}$, $D_x^2F_{(a)}$, etc., ce que deviennent la fonction $F(y)$, et ses dérivées successives prises par rapport à x quand, après la différentiation, on y donne à y la valeur correspondante à $x=a$, on aura nécessairement, en vertu de la formule de Maclaurin,

$$F(y)=F_{(a)}+(x-a)D_xF_{(a)}+\frac{(x-a)^2}{1.2}D_x^2F_{(a)}+\text{etc.},$$

et cette série sera toujours convergente quand la différence $x-a$ sera une quantité très petite. Si x avait une

très petite valeur, on pourrait faire $a = 0$ et l'on aurait

$$F(y) = F_{(0)} + x D_x F_{(0)} + \frac{x^2}{1.2} D_x^2 F_{(0)} + \text{etc.}$$

$F_{(0)}$, $D_x F_{(0)}$, etc., désignent ce que deviennent la fonction $F(y)$ et ses dérivées, quand, après la différentiation, on y donne à y la valeur correspondante à $x = 0$: or puisque, par hypothèse, l'équation proposée n'est pas résolue, il serait impossible de calculer directement les coefficients $F_{(0)}$, $D_x F_{(0)}$, $D_x^2 F_{(0)}$, etc. Pour les déterminer, reprenons l'équation $y = xY + z$, et différentions-la tour à tour par rapport à x et par rapport à z, on trouvera de cette manière

$$D_x y = Y + x D_y Y . D_x y, \quad D_z y = 1 + x D_y Y . D_z y;$$

en éliminant x entre ces deux équations, on trouve

$$D_x y = Y D_z y,$$

et par conséquent

$$D_y F(y) . D_x y = Y D_y F(y) . D_z y,$$

ou

$$D_x F(y) = Y D_z F(y).$$

Si dans cette dernière équation on pose $F(y) = Y^n$, n étant un nombre entier, il viendra

$$D_x Y^n = Y D_z Y^n;$$

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} D_x [Y^n D_z F(y)] &= D_z F(y) . D_x Y^n + Y^n D_{xz}^2 F(y) \\ &= Y D_z F(y) . D_z Y^n + Y^n D_{xz}^2 F(y) \\ &= D_x F(y) . D_z Y^n + Y^n D_{xz}^2 F(y) \\ &= D_z [Y^n D_x F(y)] = D_z [Y^{n+1} D_z F(y)] : \end{aligned}$$

on aura donc généralement

$$D_x [Y^n D_z F(y)] = D_z [Y^{n+1} D_z F(y)],$$

d'où, en faisant tour à tour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, on conclura

$$D_x [Y D_z F(y)] = D_z [Y^2 D_z F(y)],$$
$$D_x [Y^2 D_z F(y)] = D_z [Y^3 D^z F(y)] \ldots\ldots$$

Il sera facile maintenant de déterminer les coefficients $D_x F_{(0)}$, $D_x^2 F_{(0)}$;... il suffira pour cela de différentier plusieurs fois de suite, par rapport à y, l'équation

$$D_x F(y) = Y D_z F(y);$$

on trouvera en effet de cette manière

$$\begin{aligned} D_x^2 F(y) &= D_x[Y D_z F(y)] = D_z[Y^2 D_z F(y)], \\ D_x^3 F(y) &= D_x\{D_z[Y^2 D_z F(y)]\} = D_z\{D_x[Y^2 D_z F(y)]\} \\ &= D_z^2[Y^3 D_z F(y)]. \end{aligned}$$

En différentiant de nouveau, et répétant plusieurs fois les mêmes transformations, on trouverait

$$D_x^4 F(y) = D_z^3[Y^4 D_z F(y)], \ldots \quad D_x^n F(y) = D_z^{n-1}[Y^n D_z F(y)].$$

En faisant maintenant dans ces diverses équations $x = 0$, et remarquant, 1° que pour $x = 0$ on a $y = z$; 2° qu'au lieu de prendre la dérivée, par rapport à z, d'une fonction de x et de z, pour y donner ensuite à y une valeur particulière, on peut donner d'abord à x cette valeur et différentier ensuite; on aura

$$Y_{(0)} = f(y)_{(0)} = f(z), \ F_{(0)} = F(z), \ D_x F_{(0)} = f(z) D_z F(z),$$
$$D_x^2 F_{(0)} = D_z\{[f(z)]^2 D_z F(z)\},$$
$$D_x^3 F_{(0)} = D_z^2\{[f(z)]^3 D_z F(z)\} \ldots D_x^n F_{(0)} = D_z^{n-1}\{[f(z)]^n D_z F(z)\},$$
$$F(y) = F(z) + x f(z) D_z F(z) + \frac{x^2}{1.2} D_z\{[f(z)]^2 D_z F(z)\}$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3} D_z^2\{[f(z)]^3 D_z F(z)\} + \text{etc.};$$

cette série que Lagrange a donnée dans les *Mémoires de Berlin* de 1770, comprend comme cas particulier, celles du n° 89 que l'on en déduirait en faisant $z=0$ et $F(y)=y$.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

Sur les dérivées d'une ou de plusieurs variables considérées comme dépendantes, prises successivement par rapport à diverses variables considérées comme indépendantes. — Sur l'emploi de la différentiation pour l'élimination des constantes et des fonctions arbitraires.

---

91. On a souvent besoin de comparer entre elles les dérivées d'une ou de plusieurs variables dépendantes, prises successivement par rapport à diverses variables considérées comme indépendantes; or cette comparaison devient très facile à l'aide des théorèmes suivants.

Théorème 1er. Les dérivées successives d'une même variable dépendante u, prises par rapport à une certaine variable s, conserveront les mêmes valeurs si à cette variable on en substitue une autre t, liée avec elle par l'équation $t=s+a$, ou qui n'en diffère que par une quantité constante.

Démonstration. De l'équation $t=s+a$, on tire

$$dt=ds, \quad \frac{ds}{dt}=1,$$

et par suite

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{du}{ds}, \quad \frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2u}{ds^2}\frac{ds}{dt}=\frac{d^2u}{dt^2} \ldots\ldots \text{ etc.}$$

Corollaire. Si les dérivées successives de deux variables u et v, prises par rapport à une certaine variable s,

sont égales entre elles, elles le seront encore quand on prendra ces dérivées par rapport à deux variables t et τ, qui sont liées avec s par les équations $t=s+a$, $\tau=s+b$, ou qui ne diffèrent de s que de quantités constantes a et b.

92. Théorème 2[e]. Concevons que deux variables x et y soient liées tour à tour avec une troisième variable s, considérée comme variable indépendante, par des équations

$$x=\mathrm{F}(s), \quad y=f(s); \quad x=\mathrm{F}_1(s), \quad y=f_1(s),$$

et que les fonctions F, f, F_1, f_1, soient telles que, dans le passage des unes aux autres, les variables et leurs dérivées

$$x, \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2x}{ds^2} \cdots\cdots \frac{d^nx}{ds^n},$$

$$y, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} \cdots\cdots \frac{d^ny}{ds^n},$$

jusqu'à celles de l'ordre n inclusivement, conservent la même valeur pour certaines valeurs de x et de y, de sorte que les dérivées de l'ordre $n+1$, $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}$, ou au moins l'une d'elles, changent de valeurs quand on passe des fonctions F, f, aux fonctions F_1, f_1; si l'on considère une nouvelle variable r liée avec x et y par l'équation $r=F(x, y)$, les n premières dérivées de cette variable, prises par rapport à s, ou les quantités

$$\frac{dr}{ds}, \quad \frac{d^2r}{ds^2} \cdots\cdots \frac{d^nr}{ds^n},$$

ne changeront pas de valeur dans le passage des fonctions F, f, aux fonctions F_1, f_1.

Démonstration. Puisque x, y, sont des fonctions de s, on aura, en différentiant plusieurs fois de suite l'é-

quation $r = F(x, y)$,

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{dF}{dx}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{ds^2}$$
$$+ \frac{d^2F}{dx^2}\frac{dx^2}{ds^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy^2}{ds^2},$$

. . . .

$$\frac{d^nr}{ds^n} = \frac{dF}{dx}\frac{d^nx}{ds^n} + \frac{dF}{dy}\frac{d^ny}{ds^n} + \text{etc.}$$

Or, 1° les quantités

$$\frac{dF(x, y)}{dx}, \quad \frac{dF(x, y)}{dy}, \quad \frac{d^2F(x, y)}{dx^2}, \quad \frac{d^2F(x, y)}{dxdy}, \text{ etc.},$$

dépendent uniquement de la forme de la fonction F, mais nullement de F, f, F_1, f_1; 2° les dérivées

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \ldots \frac{d^nx}{ds^n}, \frac{d^ny}{ds^n},$$

conservent, par hypothèse, la même valeur quand on passe des premières fonctions aux secondes. Il en sera donc encore de même des dérivées

$$\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \ldots \frac{d^nr}{ds^n}.$$

Ajoutons que la dérivée $\frac{d^{n+1}r}{ds^{n+1}}$, donnée par l'équation

$$\frac{d^{n+1}r}{ds^{n+1}} = \frac{dF}{dx}\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} + \frac{dF}{dy}\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}} + \text{etc.},$$

changera ordinairement de valeur avec $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}$, quand on passera des premières fonctions aux secondes; néanmoins le contraire pourrait avoir lieu dans certains

cas, par exemple, si les valeurs particulières de x et de y, dont il est question dans le théorème, réduisaient à o les coefficients $\frac{dF(x,y)}{dx}$, $\frac{dF(x,y)}{dy}$ des dérivées $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}$, ou du moins le coefficient de celle dont la valeur changerait. La même remarque s'applique aux dérivées

$$\frac{d^{n+2}r}{ds^{n+2}},\quad \frac{d^{n+3}r}{ds^{n+3}},\quad \text{etc.}$$

93. Théorème 3e. Concevons maintenant que l'on veuille prendre, au lieu de s, $r = F(x,y)$ pour variable indépendante, les n premières dérivées

$$\frac{ds}{dr},\quad \frac{d^2s}{dr^2},\quad \frac{d^3s}{dr^3}\cdots\frac{d^ns}{dr^n},$$

$$\frac{dx}{dr},\quad \frac{dy}{dr}\cdots\frac{d^nx}{dr^n},\quad \frac{dy}{dr},\quad \frac{d^2y}{dr^2}\cdots\frac{d^ny}{dr^n},$$

ne changeront pas de valeur quand on passera des fonctions F, f aux fonctions F_1, f_1.

Démonstration. Si l'on considère s comme fonction de r, les variables x, y, et par suite $F(x,y)$, deviendront des fonctions de fonctions de r, et en différentiant plusieurs fois, par rapport à r, l'équation $r = F(x,y)$, on aura

$$1 = \frac{dF}{ds}\frac{ds}{dr},$$

$$0 = \frac{dF}{ds}\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{d^2F}{ds^2}\frac{ds^2}{dr^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{dF}{ds}\frac{d^ns}{dr^n}\cdots + \frac{d^nF}{ds^n}\frac{ds^n}{dr^n}.$$

Or, comme nous l'avons prouvé, les n premières dérivées

$$\frac{dF(x,y)}{ds} = \frac{dr}{ds},\quad \frac{d^2F(x,y)}{ds^2} = \frac{d^2r}{ds^2},\ldots\quad \frac{d^nF(x,y)}{ds^n} = \frac{d^nr}{ds^n}$$

conservent la même valeur quand on passe des fonctions F, f aux fonctions F_1, f_1; il en sera donc aussi de même des n dérivées

$$\frac{ds}{dr}, \quad \frac{d^2s}{dr^2}, \ldots \quad \frac{d^ns}{dr^n},$$

liées aux premières par des équations du premier degré. Si de plus on a égard aux équations

$$\frac{dx}{dr} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dr}, \quad \frac{dy}{dr} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dr},$$

$$\frac{d^2x}{dr^2} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds^2}{dr^2}, \quad \frac{d^2y}{dr^2} = \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds^2}{dr^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^nx}{dr^n} = \frac{dx}{ds}\frac{d^ns}{dr^n} + \text{etc.}, \quad \frac{d^ny}{dr^n} = \frac{dy}{ds}\frac{d^ns}{dr^n} + \text{etc.},$$

on en conclura que puisque les n premières dérivées

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \ldots\ldots \quad \frac{d^nx}{ds^n}, \quad \frac{d^ny}{ds^n}, \quad \frac{ds}{dr}, \quad \frac{d^2s}{dr^2}, \ldots\ldots \quad \frac{d^ns}{dr^n},$$

conservent la même valeur quand on passe des fonctions F, f aux fonctions F_1, f_1, il en sera de même des n dérivées $\frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dr}, \ldots \frac{d^nx}{dr^n}, \frac{d^ny}{dr^n}$.

Corollaire 1er. Sans troubler l'égalité qui existe de part et d'autre entre les n dérivées $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \ldots \frac{d^nx}{ds^n}, \frac{d^ny}{ds^n}$ quand on remplace les fonctions F, f par les fonctions F_1, f_1, on peut donc substituer à la variable s la variable r liée par une équation finie quelconque avec les variables x, y; seulement, après cette substitution, on ne pourra plus affirmer que pour les valeurs particulières dont il est question dans le premier théorème, l'une au moins des deux dérivées $\frac{d^{n+1}x}{dr^{n+1}}, \frac{d^{n+1}y}{dr^{n+1}}$ change de valeur quand on passe des premières fonctions aux secondes.

94. Rien n'empêche, dans les théorèmes qui précèdent, de supposer $r = x$, alors des dérivées $\frac{dx}{dr}, \frac{d^2x}{dr^2}, \ldots \frac{d^nx}{dr^n}$ la première se réduit à l'unité, les suivantes à o, tandis que les expressions $\frac{dy}{dr}, \frac{d^2y}{dr^2}, \ldots \frac{d^ny}{dr^n}$, deviennent les dérivées $y', y'', \ldots y^{(n)}$ de y, prises par rapport à x; on peut dès lors énoncer le théorème suivant.

Théorème 4me. Si pour certaines valeurs particulières de x et de y, les n premières dérivées

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \ldots \quad \frac{d^nx}{ds^n}, \quad \frac{d^ny}{ds^n},$$

de deux variables x, y, liées tour à tour avec une troisième variable s par les équations

$$x = \mathrm{F}(s), \quad y = f(s), \quad x = \mathrm{F}_1(s), \quad y = f_1(s),$$

ou, ce qui revient au même, liées tour à tour entre elles par les deux équations

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \varphi_1(x, y) = 0,$$

conservent la même valeur quand on passe des fonctions F, f aux fonctions F_1, f_1, ou de la fonction φ à la fonction φ_1, il en sera encore de même des n premières dérivées $y', y'', \ldots y^{(n)}$ de y prises par rapport à x, et par conséquent des différentielles dy, $d^2y, \ldots d^ny$. Ajoutons que dans le passage de F, f, à F_1, f_1, la dérivée ou la différentielle de l'ordre $n+1$ et les suivantes, prendront ordinairement des valeurs nouvelles; néanmoins, le contraire pourrait avoir lieu dans certains cas particuliers.

95. Si, en considérant toujours r comme variable indépendante, on désigne par t, u, etc., de nouvelles fonctions des coordonnées x, y, on aura

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{dt}{dy}\frac{dy}{dr},$$

$$\frac{d^2t}{dr^2} = \frac{dt}{dx}\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{dt}{dy}\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{d^2t}{dx^2}\frac{dx^2}{dr^2} + 2\frac{d^2t}{dxdy}\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr} + \frac{d^2t}{dy^2}\frac{dy^2}{dr^2},$$

. . . .

$$\frac{d^nt}{dr^n} = \frac{dt}{dx}\frac{d^nx}{dr^n} + \frac{dt}{dy}\frac{d^ny}{dr^n} + \text{etc.};$$

et comme les expressions $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dy}{dr}, \ldots \frac{d^nx}{dr^n}$, $\frac{d^ny}{dr^n}$, conservent la même valeur quand on passe des fonctions F, f aux fonctions F_1, f_1, il est clair qu'on en pourra dire autant, non-seulement des fonctions dérivées $\frac{dt}{dr}, \frac{d^2t}{dr^2}, \ldots \frac{d^nt}{dr^n}$, mais encore des différentielles dt, $d^2t, \ldots d^nt$. On arriverait à des conclusions semblables en substituant la fonction u à la fonction t. On pourra même, d'après ce que nous avons dit, échanger entre elles, de toutes les manières possibles, les fonctions t, u, r, et énoncer généralement le théorème suivant.

Théorème 5[me]. Si pour certaines valeurs de x et de y, les n premières dérivées

$$\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots \frac{d^nx}{ds^n}, \quad \frac{dy}{ds}, \frac{d^2y}{ds^2}, \ldots \frac{d^ny}{ds^n},$$

des variables x, y, ne changent pas de valeur, quand, aux équations

$$x = F(s), \quad y = f(s) \quad \text{ou} \quad F(x, s) = 0, \quad f(x, s) = 0,$$

on substitue les suivantes

$$x = F_1(s), \quad y = f_1(s) \quad \text{ou} \quad F_1(x, s) = 0, \quad f_1(x, s) = 0,$$

on pourra en dire autant des n premières dérivées ou des

n premières différentielles d'une fonction quelconque t des variables x, y, prises par rapport à une autre fonction arbitraire u de ces mêmes variables.

Si les dérivées de l'ordre $n+1$, $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}$, ou au moins l'une d'entre elles, changeaient de valeur dans le passage des fonctions F, f, aux fonctions F_1, f_1, il en sera en général de même de la dérivée $\frac{d^{n+1}t}{du^{n+1}}$, ou de la différentielle $d_u{}^{n+1}t$; le contraire pourrait cependant avoir lieu dans certains cas particuliers.

96. On arriverait à des conclusions analogues si, au lieu de deux variables x, y, on en considérait trois x, y, z, et l'on démontrerait facilement le théorème suivant :

Théorème 6[me]. Si pour de certaines valeurs de x, y, z, les n premières dérivées

$$\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots \frac{d^nx}{ds^n}, \quad \frac{dy}{ds}, \frac{d^2y}{ds^2}, \ldots \frac{d^ny}{ds^n},$$
$$\frac{dz}{ds}, \frac{d^2z}{ds^2}, \ldots \frac{d^nz}{ds^n},$$

des variables x, y, z, ne changent pas de valeur, quand, aux équations

$$x = F(s), \quad y = f(s), \quad z = \mathrm{f}(s),$$

ou

$$F(x, s) = 0, \quad f(y, s) = 0, \quad \mathrm{f}(z, s) = 0,$$

on substitue les suivantes

$$x = F_1(s), \quad y = f_1(s), \quad z = \mathrm{f}_1(s),$$

ou

$$F_1(x, s) = 0, \quad f_1(y, s) = 0, \quad \mathrm{f}_1(z, s) = 0,$$

on pourra en dire autant des n premières dérivées, ou des n premières différentielles d'une fonction quelconque t des trois variables x, y, z, prises par rapport à

une autre fonction arbitraire u de ces mêmes variables.

Si les dérivées de l'ordre $n+1$, $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}}$, ou au moins l'une d'entre elles, changeaient de valeur dans le passage des fonctions F, f, f, aux fonctions F_1, f_1, f_1, il en sera en général de même de la dérivée $\frac{d^{n+1}t}{du^{n+1}}$, ou de la différentielle $d_u{}^{n+1}t$, quoique le contraire puisse arriver dans certains cas particuliers.

Rien n'empêche, dans le théorème qui précède, de faire $u=z$, puis, tour à tour, $t=x$, $t=y$; on arriverait de cette manière à un nouveau théorème:

THÉORÈME 7[me]. Si pour certaines valeurs particulières de x, y, z, les n premières dérivées

$$\frac{dx}{ds}, \ldots \frac{d^n x}{ds^n}, \quad \frac{dy}{ds}, \ldots \frac{d^n y}{ds^n}, \quad \frac{dz}{ds}, \ldots \frac{d^n z}{ds^n},$$

des variables x, y, z, liées tour à tour avec s par les équations

$$\begin{aligned} F(x, s) &= 0, & f(y, s) &= 0, & f(z, s) &= 0, \\ F_1(x, s) &= 0, & f_1(y, s) &= 0, & f_1(z, s) &= 0, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, liées tour à tour entre elles par les équations

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad \chi(x, y, z)=0; \quad \varphi_1(x, y, z)=0, \quad \chi_1(x, y, z)=0,$$

ne changent pas de valeurs, quand, aux fonctions F, f, f, on substitue les fonctions F_1, f_1, f_1, ou, ce qui revient au même, quand, aux fonctions φ et χ, on substitue les fonctions φ_1 et χ_1; on pourra en dire autant des n premières dérivées

$$\frac{dx}{dz}, \quad \frac{d^2x}{dz^2}, \ldots \frac{d^n x}{dz^n}, \qquad \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dz^2}, \ldots \frac{d^n y}{dz^n},$$

prises par rapport à z, considérée comme seule va-

riable indépendante. Si les dérivées $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$, etc., ou du moins l'une d'entre elles, changeaient de valeurs, il en sera en général de même des dérivées $\frac{d^{n+1}x}{dz^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}}$, quoique le contraire puisse arriver dans certains cas.

97. On se sert souvent de la différentiation pour éliminer d'une équation un certain nombre de constantes; et cette élimination conduit quelquefois à des résultats fort importants; nous entrerons à ce sujet dans quelques détails. Remarquons d'abord que l'on trouverait les mêmes équations différentielles si, au lieu de l'équation $F(x, y) = 0$, on avait $F(x, y) = c$, c étant une constante, parce que la constante disparaît à la première différentiation pour ne plus reparaître jamais. De ces équations différentielles identiques on tirerait les mêmes valeurs des dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. Quoiqu'une équation ne se présente pas sous la forme $F(x, y) = c$, il arrive souvent qu'une ou plusieurs différentiations font disparaître des constantes. Soit, par exemple, l'équation

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2;$$

en la différentiant deux fois de suite on aura

$$(y - b)\frac{dy}{dx} + x - a = 0,$$

$$(y - b)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

et les deux constantes r et a auront disparu. Une troisième différentiation donnerait

$$(y - b)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

De ces équations réunies, on tirera,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-a}{b-y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-a)^2+(b-y)^2}{(b-y)^3}=\frac{r^2}{(b-y)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}}{b-y}=\frac{3r^2(x-a)}{(b-y)^5},$$

et en éliminant $y-b$ entre les deux dernières,

$$\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)\frac{d^3y}{dx^3}-3\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0.$$

Or cette dernière équation ne contient aucune des constantes a, b, r.

On pourrait aussi, au moyen de ces diverses équations, exprimer les trois constantes a, b, r, en fonction de x, de y et des deux dérivées $\frac{dy}{dx}=y'$, $\frac{d^2y}{dx^2}=y''$; on trouvera en effet

$$b=y+\frac{y'^2+1}{y''},\quad a=x-\frac{y'(y'^2+1)}{y''},\quad r=\pm\frac{(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

On conclura de ce qui précède, que de l'équation

$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2,$$

qui contient trois constantes arbitraires, on pourra déduire, 1° une équation différentielle du troisième ordre qui n'en contient aucune; 2° trois équations du second ordre qui en contiennent chacune une; 3° trois équations du premier ordre, dans chacune desquelles il y aurait deux constantes arbitraires.

98. En général, si l'on a une équation entre x, y et n constantes arbitraires, et qu'on la différentie un nombre m de fois, on aura $m+1$ équations entre lesquelles on pourra éliminer m constantes, ce qui donnera une équation différentielle de l'ordre m, où il ne restera qu'un nombre $n-m$ de constantes; et comme on peut choisir

à volonté les m constantes qu'on élimine, il est évident qu'on pourra former autant d'équations de l'ordre m, renfermant $n-m$ constantes, que l'on peut faire de combinaisons m à m avec n quantités, c'est-à-dire

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Lorsqu'on différentie n fois, on a $n+1$ équations entre lesquelles on peut éliminer les n constantes de l'équation d'où l'on est parti : on a ainsi une équation de l'ordre n où il n'en reste aucune, et qui est commune à toutes les équations que l'on peut déduire de la proposée, en attribuant successivement aux constantes qu'elle contient toutes les valeurs possibles. Il est important de remarquer que si, après avoir calculé, comme nous l'avons dit tout-à-l'heure, une équation différentielle de l'ordre m qui ne contienne qu'un nombre $n-m$ de constantes, on différentiait de nouveau cette équation $n-m$ fois, ce qui donnerait, en la réunissant aux équations résultant de cette opération, un nombre $n-m+1$ d'équations, et qu'on éliminât entre elles les $n-m$ constantes restantes, on retomberait toujours sur la même équation différentielle de l'ordre n qui n'en contient aucune.

99. Il est inutile de nous arrêter à la possibilité de l'élimination d'un certain nombre de constantes par la différentiation successive d'une ou de plusieurs équations à plusieurs variables indépendantes. Passons à l'élimination des fonctions arbitraires. Considérons d'abord l'équation $u=\varphi(v)$, dans laquelle u et v sont des fonctions de x, y, z, et $\varphi(v)$ une fonction tout-à-fait arbitraire de v. En donnant tour à tour à cette fonction différentes formes, on obtiendra diverses équations, qui offriront toutes un caractère commun, en ce sens qu'on peut, en éliminant la fonction φ, arriver à une équation qui soit

commune à toutes celles que peut représenter l'équation $u = \varphi(v)$. En effet, différentions cette équation en regardant tour à tour x et z ou y et z comme seules variables, et posons, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

il viendra

$$\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} = \varphi'(v)\left(\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dz}\right),$$
$$\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = \varphi'(v)\left(\frac{dv}{dy} + q\frac{dv}{dz}\right).$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, et posant

$$\mathrm{P} = \frac{du}{dy}\frac{dv}{dz} - \frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}, \quad \mathrm{Q} = \frac{du}{dz}\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}, \quad \mathrm{R} = \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx},$$

on trouvera l'équation aux différentielles partielles du premier ordre

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R},$$

100. Supposons maintenant que l'on ait deux équations de la forme

$$f[x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c), \ldots] = 0, \quad \mathrm{F}[x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c), \ldots] = 0,$$

dans laquelle c est une fonction implicite de x, y, z, et $\varphi(c)$, $\chi(c)$, etc., des fonctions arbitraires de cette quantité; voyons dans quels cas, par des différentiations successives, on pourra éliminer la quantité c et les fonctions arbitraires. Pour y parvenir, il faudra considérer z et c comme des fonctions des variables indépendantes x, y, puis éliminer les quantités

$$c, \frac{dc}{dx}, \frac{dc}{dy}, \frac{d^2c}{dx^2}, \frac{d^2c}{dxdy}, \frac{d^2c}{dy^2}, \ldots$$
$$\varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c), \ldots, \chi(c), \chi'(c), \chi''(c), \ldots$$

entre les équations données et celles qu'on en déduit par des différentiations successives relatives, soit à la variable x, soit à la variable y. Supposons, pour fixer les idées,

que l'on désigne par m le nombre des fonctions arbitraires $\varphi(c)$, $\chi(c)$, $\psi(c)\ldots$, et par n un nombre entier quelconque; si, parmi les différentielles de c et les dérivées des fonctions arbitraires $\varphi(c)$, $\chi(c)$,... on néglige celles dont l'ordre est supérieur à n, le nombre des termes de la série

$$c,\quad \frac{dc}{dx},\quad \frac{dc}{dy},\ldots\quad \frac{d^nc}{dx^n},\quad \frac{d^nc}{dx\,dy^{n-1}},\ldots\quad \frac{d^nc}{dy^n},$$

sera égal à $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, tandis que le nombre des quantités

$$\varphi(c),\ \varphi'(c),\ldots\ \varphi^{(n)}(c),\quad \chi(c),\ \chi'(c),\ldots\ \chi^{(n)}(c),\ldots.$$

sera égal à $(n+1)m$. D'autre part, si l'on joint aux équations données leurs dérivées d'un ordre inférieur ou égal à n, on obtiendra en tout $(n+1)(n+2)$ équations, et l'on pourra entre ces dernières éliminer la quantité c, ainsi que les fonctions arbitraires et leurs dérivées jusqu'à celles de l'ordre n, pourvu que l'on ait

$$(n+1)(n+2) > \frac{(n+1)(n+2)}{2} + (n+1)m,\ \text{ou}\ \frac{n}{2}+1 > m;$$

or cette condition sera remplie si l'on prend $n=2m-1$, et alors l'élimination produira m équations aux différentielles partielles, auxquelles satisferont toutes les équations que l'on peut déduire des équations proposées.

Lorsque les équations proposées renferment une seule fonction arbitraire $\varphi(c)$, et se réduisent à

$$f[x, y, z, c, \varphi(c)] = 0,\quad F[x, y, z, c, \varphi(c)] = 0,$$

en joignant à chacune de ces deux équations les deux dérivées partielles du premier ordre, on obtient en tout six équations entre les quantités

$$x,\ y,\ z,\ p=\frac{dz}{dx},\ q=\frac{dz}{dy},\ c,\ \frac{dc}{dx},\ \frac{dc}{dy},\ \varphi(c),\ \varphi'(c),$$

et l'élimination des cinq dernières de ces quantités entre les six équations dont il s'agit, produit, comme on devait s'y attendre, une équation aux différentielles partielles du premier ordre entre les variables indépendantes x, y et la variable dépendante z.

[illegible]. Lorsque les équations proposées renferment deux fonctions arbitraires $\varphi(c)$, $\chi(c)$, et se réduisent à

$$f[x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c)] = 0, \quad F[x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c)] = 0,$$

en joignant à chacune de ces équations ses dérivées partielles du premier et du second ordre, on n'obtient en tout que douze équations entre lesquelles il n'est pas possible d'éliminer, du moins en général, les douze quantités

$$c, \frac{dc}{dx}, \frac{dc}{dy}, \frac{d^2c}{dx^2}, \frac{d^2c}{dxdy}, \frac{d^2c}{dy^2},$$
$$\varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c), \chi(c), \chi'(c), \chi''(c);$$

mais en s'élevant jusqu'aux équations du 3me ordre, on obtiendra en tout vingt équations, entre lesquelles on pourra éliminer ces douze quantités avec les suivantes :

$$\frac{d^3c}{dx^3}, \frac{d^3c}{dx^2dy}, \frac{d^3c}{dxdy^2}, \frac{d^3c}{dy^3}, \varphi'''(c), \chi'''(c);$$

et l'élimination produira deux équations aux différentielles partielles du 3me ordre, entre les variables indépendantes x, y, et la variable dépendante z.

Il est bon d'observer que, dans certain cas, l'ordre des équations aux différentielles partielles produites par l'élimination dont nous venons de parler, peut s'abaisser considérablement. Supposons, par exemple, que les équations données renferment trois fonctions arbitraires $\varphi(c)$, $\chi(c)$, $\psi(c)$; comme on aura dans cette hypothèse $m = 3$, $2m - 1 = 5$, il faudra généralement, pour effectuer l'élimination, s'élever jusqu'aux dérivées du 5me ordre, et cette élimination produira trois équations aux différen-

tielles partielles du 5me ordre, entre x, y et z. Mais si l'on établit entre les fonctions $\varphi(c)$, $\chi(c)$, $\psi(c)$, les relations $\chi(c)=\varphi'(c)$, $\psi(c)=\varphi''(c)$, c'est-à-dire si les équations proposées se réduisent à

$$f[x,y,z,c,\varphi(c),\varphi'(c),\varphi''(c)]=0, \mathrm{F}[x,y,z,c,\varphi(c),\varphi'(c),\varphi''(c)]=0;$$

alors, en joignant à ces formules leurs dérivées du premier et du second ordre, on obtiendra en tout douze équations, entre lesquelles on pourra éliminer les onze quantités,

$$c, \frac{dc}{dx}, \frac{dc}{dy}, \frac{d^2c}{dx^2}, \frac{d^2c}{dxdy}, \frac{d^2c}{dy^2},$$
$$\varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c), \varphi'''(c), \varphi^{\mathrm{IV}}(c),$$

et l'élimination produira une seule équation aux différentielles partielles du second ordre, entre les variables x, y, z.

Nota. Les deux équations

$$f[x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c), \ldots]=0, \mathrm{F}[x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c)\ldots]=0,$$

équivalent évidemment à une équation unique

$$\mathfrak{F}[x, y, z, \varphi(x, y, z), \chi(x, y, z), \ldots]=0.$$

De cette remarque, joint à ce qui précède, on conclut, 1° qu'il ne suffit pas, en général, de recourir aux différentielles du second ordre pour éliminer d'une équation donnée deux fonctions arbitraires $\varphi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$; 2° qu'en recourant aux différentielles du second ordre on pourra toujours éliminer de l'équation

$$\mathrm{F}[x, y, z, \varphi(x, y z), \varphi'(x, y, z), \varphi''(x, y, z)]=0,$$

la fonction arbitraire φ et ses dérivées φ', φ''.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

SECONDE PARTIE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES, OU RECHERCHES DES PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES, DES COURBES A DOUBLE COURBURE ET DES SURFACES.

VINGTIÈME LEÇON.

De la tangente et de la normale à une courbe plane et située dans un plan pris pour plan unique des coordonnées. — Longueurs appelées Tangente, Normale, Sous-tangente, et Sous-normale.

101. *Définition.* La tangente à une courbe en un point donné (x, y) est une sécante dont deux au moins des points d'intersection sont réunis en un seul.

Pour déterminer la tangente à la courbe au point x, y, menons par ce point un demi-axe parallèle à l'axe des x et dirigé dans le sens des x positifs, et concevons qu'un rayon vecteur mobile appliqué d'abord sur ce demi-axe, tourne de droite à gauche autour du point x, y, et vienne coïncider avec la corde ou sécante menée du point x, y, au point $x + \Delta x$, $y + \Delta y$; si l'on nomme t l'angle qu'aura décrit le rayon vecteur ; on aura $\operatorname{tang} t = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; et en appelant ξ, η, les coordonnées d'un point quelconque de

la sécante, son équation serait

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x), \quad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Concevons à présent que le point $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ vienne à se rapprocher indéfiniment du point (x, y), la sécante qui joint ces deux points tendra de plus en plus à se confondre avec une certaine droite que l'on nomme *tangente* à la courbe, et qui touche la courbe au point (x, y). Pour déterminer la direction de cette tangente, il suffit de chercher la limite vers laquelle converge l'angle t quand les différences Δx, Δy deviennent infiniment petites. Or, en appelant τ cet angle, on aura

$$\operatorname{tang}\tau = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'.$$

On tire de cette équation

$$\cot\tau = -\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y'}, \cos\tau = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

$$\sin\tau = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

et en appelant ξ, η, les coordonnées d'un point quelconque de la tangente, son équation sera

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\xi - x}{dx}.$$

102. Si par le point (x, y) on mène une droite perpendiculaire à la tangente, elle fera avec l'axe des x un angle ν déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang}\nu = -\frac{1}{\operatorname{tang}\tau} = -\frac{1}{y'} = -\frac{dx}{dy},$$

et les coordonnées ξ, η, d'un point quelconque de cette

perpendiculaire que l'on désigne sous le nom de *normale*, vérifieront l'équation

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x), \quad \frac{\eta - y}{dx} = -\frac{\xi - x}{dy}.$$

103. Supposons que l'équation de la courbe dont il s'agit soit $u = F(x, y) = 0$. En différentiant, on a

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

et en substituant dans cette dernière équation, à la place de dx, dy, les quantités proportionnelles $\xi - x$, $\eta - y$, ou $-(\eta - y)$, $\xi - x$, on trouve pour l'équation de la tangente

$$(\xi - x)\frac{dF}{dx} + (\eta - y)\frac{dF}{dy} = 0,$$

et pour l'équation de la normale,

$$(\xi - x)\frac{dF}{dy} - (\eta - y)\frac{dF}{dx} = 0.$$

Ainsi, pour obtenir l'équation de la tangente, il suffit de remplacer dans l'équation différentielle de la courbe les différentielles dx, dy par les différences $\xi - x$, $\eta - y$; au contraire, pour obtenir l'équation de la normale, on devra remplacer dy par $\xi - x$, et dx par $-(\eta - y)$.

104. *Scolie* 1er. Les équations de la tangente et de la normale ne changeraient pas si, à l'équation $F(x, y) = 0$, on substituait l'équation $F(x, y) = c$, ou $u = c$.

Scolie 2e. En regardant dans les équations

$$(\xi - x)\frac{dF}{dx} + (\eta - y)\frac{dF}{dy} = 0,$$
$$(\xi - x)\frac{dF}{dy} - (\eta - y)\frac{dF}{dx} = 0,$$

ξ, η comme des quantités constantes, chacune de ces

deux équations, combinée avec l'équation $F(x, y) = 0$, donnerait les coordonnées x et y des points où les tangentes et les normales menées par le point ξ, η rencontrent les différentes courbes représentées par l'équation $F(x, y) = c$; et puisque ces deux équations sont indépendantes de la quantité c, qui seule varie d'une courbe à l'autre, elles représenteront évidemment les lieux géométriques des points où les courbes qu'on déduit de l'équation $F(x, y) = c$, en faisant varier la constante c, sont rencontrées par celles de leurs normales ou de leurs tangentes qui passent par le point ξ, η; de sorte que pour mener par le point ξ, η des tangentes ou des normales à ces courbes, il suffira de construire les deux lignes

$$(\xi - x)\frac{dF}{dx} + (\eta - y)\frac{dF}{dy} = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{dF}{dy} - (\eta - y)\frac{dF}{dx} = 0;$$

elles rencontreront les courbes $F(x, y) = c$ en certains points que l'on joindra au point ξ, η, et l'on aura les tangentes et les normales cherchées.

105. *Applications*. Si l'équation $F(x, y) = c$ se réduit à $u + v + w + \ldots = c$, u, v, w... étant des fonctions entières et homogènes, la première du degré m, la seconde du degré $m - 1$, la troisième du degré $m - 2$, on aura

$$\frac{dF}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \text{etc.}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy} + \text{etc.},$$

et l'équation de la tangente deviendra

$$(\xi - x)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} \ldots\right) + (\eta - y)\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy} \ldots\right) = 0.$$

Mais, en vertu du théorème des fonctions homogènes, on aura

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}\ldots=mu,\quad x\frac{dv}{dx}+y\frac{dv}{dy}\ldots=(m-1)v\ldots \text{ etc.};$$

l'équation de la tangente se réduira donc, en ayant égard à l'équation $u+v+w+\ldots=c$, à

$$\xi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)+\eta\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}\ldots\right)=mc-v-2w-\ldots.$$

Cette équation représente, quand on y regarde x, y, comme seuls constants, ξ, η, comme seuls variables, la tangente à la courbe menée par le point (x, y); et quand on y regarde ξ, η comme constants, x, y comme variables, une courbe du degré $m-1$ qui renferme les points de contact de la courbe avec les tangentes qui concourent au point (ξ, η). Si $v=0$, $w=0$,..... on a

$$\xi\frac{du}{dx}+\eta\frac{du}{dy}=mc.$$

106. 1er *Exemple*. Considérons le cercle $x^2+y^2=R^2$.

Ici $$m=2,\quad u=x^2+y^2,\quad c=R^2,$$

l'équation de la tangente est $\xi x+\eta y=R^2$. On y parviendrait encore en remplaçant dans l'équation différentielle $xdx+ydy=0$, dx et dy par $\xi-x$ et $\eta-y$; ce qui donne

$$(\xi-x)x+(\eta-y)y=0 \text{ ou } \xi x+\eta y=x^2+y^2=R^2.$$

L'équation de la normale est

$$(\xi-x)y-(\eta-y)x=0 \text{ ou } \xi y-\eta x=0,\quad \frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y},$$

équation de la droite ou du rayon qui va du centre au point (x, y). L'équation

$$(\xi-x)x+(\eta-y)y=0,$$

qui peut se mettre sous l'une des formes

$$\left(x-\frac{\xi}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{2}\right)^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{4},\quad \xi x+\eta y=R^2,$$

et qui représente la tangente quand x et y sont constants, ξ, η variables, représente, quand ξ et η sont au contraire déterminés, sous la première forme un cercle qui a pour centre le milieu de la droite qui va de l'origine au point $(\xi,\ \eta)$, et pour rayon la moitié de la distance de l'origine à ce même point; sous la deuxième une certaine droite. Sur ce cercle et cette droite se trouvent les points de contact des tangentes menées au cercle par le point (ξ, η), et comme le cercle est indépendant du rayon R, il est le lieu géométrique de tous les points où les tangentes menées du point (ξ, η) aux divers cercles que l'on obtient en faisant varier R dans l'équation $x^2+y^2=R^2$, rencontrent ces cercles. Il en est de même par rapport aux normales de la ligne $\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}$.

2me *Exemple.* Considérons l'ellipse ou l'hyperbole représentée par l'équation $Ax^2+2Bxy+Cy^2=K$.

Ici $\quad m=2,\ c=K,\ u=Ax^2+2Bxy+Cy^2;$

l'équation différentielle de la courbe est

$$dx(Ax+By)+dy(Cy+Bx)=0,$$

on trouvera donc pour les équations de la tangente et de la normale, en suivant l'une des méthodes ci-dessus indiquées,

$$(\xi-x)(Ax+By)+(\eta-y)(Cy+Bx)=0,$$
$$(\xi-x)(Cy+Bx)-(\eta-y)(Ax+By)=0,$$

ou, pour l'équation de la tangente,

$$\xi(Ax+By)+\eta(Cy+Bx)=K.$$

Si l'équation de la courbe était

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1,$$

l'équation de la tangente deviendrait

$$\xi \frac{x}{a^2} \pm \eta \frac{y}{b^2} = 1, \text{ ou } (\xi - x)\frac{x}{a^2} \pm (\eta - y)\frac{y}{b^2} = 0, \text{ etc.}$$

3me *Exemple.* La parabole $y^2 = 2px$. L'équation de la tangente est

$$(\eta - y)y - p(\xi - x) = 0 \text{ ou } \eta y - p\xi = px;$$

celle de la normale

$$y(\xi - x) + p(\eta - y) = 0, \text{ etc.}$$

4me *Exemple.* La logarithmique

$$y = \frac{1}{\mathrm{l}a}\mathrm{l}x, \; dy = \frac{dx}{x\mathrm{l}a}, \quad xdy - \frac{1}{\mathrm{l}a}dx = 0;$$

les équations de la tangente et de la normale sont

$$x\mathrm{l}a(\eta - y) - (\xi - x) = 0, \; x\mathrm{l}a(\xi - x) + (\eta - y) = 0.$$

5me *Exemple.* La spirale logarithmique

$$\frac{y}{x} = \text{tang } \mathrm{l}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\mathrm{R}}, \quad \text{arc tang}\frac{y}{x} = \mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2} - \mathrm{lR};$$

en différentiant, on a

$$xdy - ydx = xdx + ydy, \quad dx(x+y) + dy(y-x) = 0;$$

et les équations de la tangente et de la normale sont

$$(\xi - x)(x+y) + (\eta - y)(y - x) = 0,$$
$$(\xi - x)(y - x) - (\eta - y)(x + y) = 0.$$

Lorsqu'on y regarde ξ, η comme constants, x, y comme seuls variables, ces dernières équations représentent deux cercles qui coupent la spirale logarithmique aux points

où elle est rencontrée par celles des tangentes qui concourent au point (ξ, η).

107. Si les axes des coordonnées cessaient d'être rectangulaires et faisaient entre eux l'angle ω, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ exprimerait non plus $\tang \tau$, mais $\frac{\sin \tau}{\sin(\omega - \tau)}$; l'équation de la tangente serait toujours

$$(\eta - y) = \frac{dy}{dx}(\xi - x) = y'(\xi - x),$$

et l'équation de la normale deviendrait

$$(\eta - y) = \frac{1 + \frac{dy}{dx}\cos\omega}{\frac{dy}{dx} + \cos\omega}, \quad (\eta - y) = \frac{1 + y'\cos\omega}{y' + \cos\omega}(\xi - x).$$

108. Considérons une courbe quelconque AB (*fig.* 1) au point M de cette courbe, menons à la tangente la normale MN; les parties MT et MN de la tangente et de la normale comprises entre le point de tangence et l'axe des x sont ce qu'on appelle la *tangente* et la *normale*, nous les désignerons par les lettres T et N; on appelle *sous-tangente* et *sous-normale*, et nous désignerons par les notations S_t, S_n, les distances comptées sur l'axe des x entre le pied de l'ordonnée et les points où cet axe est rencontré par la tangente et la normale à la courbe. Ces quatre lignes sont faciles à calculer.

En effet, en désignant par ξ_1, ξ_2 les abscisses des points où la tangente et la normale rencontrent l'axe des x, les longueurs S_t, S_n sont égales, au signe près, aux différences $\xi_1 - x$, $\xi_2 - x$, mais en faisant $\eta = 0$ dans l'équation de la tangente et de la normale, on a

$$\xi_1 - x = \frac{y}{y'}, \quad \xi_2 - x = y y',$$

donc

$$S_t = \pm \frac{y}{y'}, \quad S_n = \pm yy',$$

et par suite

$$T = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{TP}^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = \pm \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2},$$

$$N = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PN}^2} = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2} = \pm y\sqrt{1 + y'^2};$$

on a donc

$$S_t = \pm\frac{y}{y'}, S_n = \pm yy', T = \pm\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, N = \pm y\sqrt{1+y'^2}.$$

On parvient encore plus simplement à ces valeurs en remarquant que si τ et ν sont les angles que la tangente et la normale font avec les axes, les triangles rectangles MTP, MNP donnent

$$S_t = \pm\frac{y}{\operatorname{tang}\tau} = \pm\frac{y}{y'}, \quad T = \pm\frac{y}{\sin\tau} = \pm\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2},$$

$$S_n = \pm\frac{y}{\operatorname{tang}\nu} = \pm yy', \quad N = \pm\frac{y}{\sin\nu} = \pm y\sqrt{1+y'^2}.$$

Ces équations donnent $S_t . S_n = y^2$; l'ordonnée y est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente et la sous-normale.

Exemples :

1°. *Cercle :* $x^2 + y^2 = r^2$, $\quad S_t = \pm\dfrac{R^2 - x^2}{x}$,

$$S_n = \pm x, \quad N = R, \quad T = \pm\frac{R}{x}(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}};$$

2°. *Ellipse ou hyperbole :* $\quad \dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$,

$$S_t = \pm\left(\frac{a^2}{x} \mp x\right), \quad S_n = \pm\frac{b^2}{a^2}x,$$

$$N = \frac{b}{a}\left[\left(\frac{b^2}{a^2} \mp 1\right)x^2 \pm a^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$T = \left[\left(\frac{2a^4}{x^2} \pm b^2\right)\left(1 \mp \frac{x^2}{a^2}\right) + x^2 - \frac{a^4}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}};$$

le rapport de la sous-normale à l'abscisse est constant, la sous-tangente est indépendante du demi-axe b;

3°. *Parabole :* $y^2 = 2px$, $S_t = 2x$, $S_n = p$,

$$N = p^{\frac{1}{2}}(p + 2x)^{\frac{1}{2}}, \quad T = 2x^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

la sous-normale est constante et la sous-tangente double de l'abscisse;

4°. La logarithmique $x = Ly = \frac{1}{la} ly$,

$$S_t = \frac{1}{la}, \quad S_n = lae^{2xla}, \quad N = lae^{2xla}\sqrt{\left(\frac{1}{la}\right)^2 + e^{2xla}},$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{la}\right)^2 + e^{2xla}};$$

la sous-tangente est constante.

109. 5°. *Cycloïde.* Concevons que le cercle ADE (*fig.* 2), tangent à la ligne AX au point A, roule sur cette ligne AX, le point de la circonférence qui coïncidait au premier instant avec le point A, décrira une courbe que l'on nomme cycloïde. Prenons pour axes des coordonnées les deux lignes AX, AY; pendant que le cercle roulera sur l'axe des x, le centre se mouvra parallèlement au même axe, et le rayon CA tournera autour du centre en décrivant un angle qui croîtra sans cesse; désignons par ω cet angle MON, par $AN = a$, $ON = b$ les coordonnées du centre O, par $AP = x$, $PM = y$ les coordonnées de l'extrémité du rayon ou d'un point quelconque de la courbe, l'arc $MN = R\omega$ sera évidemment égal à la ligne $AN = a$, puisque tous les points de l'arc MN se sont tour à tour appliqués sur AN; on a donc $a = R\omega$, $b = R$,

$$x = AP = AN - PN = AN - MQ = R\omega - R\sin\omega,$$
$$y = MP = ON - QN = R - R\cos\omega;$$

on aura donc, en admettant que la notation arc cos désigne toujours un arc compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$,

$$x = \mathrm{R}(\omega - \sin\omega), \quad y = \mathrm{R}(1 - \cos\omega), \quad \cos\omega = \frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}},$$

$$\omega = \arc\cos\frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}} \pm n\pi, \quad \sin\omega = \pm\frac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{2\mathrm{R}y - y^2}.$$

Dans cette seconde formule on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que l'angle ω est de la forme $2n\pi+\theta$ ou de la forme $(2n+1)\pi+\theta$, θ étant plus petit que π, de sorte que l'on peut écrire

$$\sin\omega = \frac{1}{\mathrm{R}}\cos n\pi\sqrt{2\mathrm{R}y - y^2},$$

$$x = \mathrm{R}\left(\arc\cos\frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}} \pm n\pi\right) - \cos n\pi\sqrt{2\mathrm{R}y - y^2}.$$

On reconnaîtra sans peine, à l'aide de ces équations, que la cycloïde est composée d'une infinité de branches, toutes pareilles les unes aux autres, dont les points extrêmes situés sur l'axe des x répondent aux abscisses

$$x = 0, \quad x = \pm 2\pi\mathrm{R}, \quad x = \pm 4\pi\mathrm{R}, \ldots \quad x = \pm 2n\pi\mathrm{R},$$

et dont chacune est divisée en deux parties symétriques par une ordonnée correspondante aux abscisses

$$x = \pi\mathrm{R}, \quad x = \pm 3\pi\mathrm{R}, \ldots \quad x = \pm(2n-1)\pi\mathrm{R}, \text{ etc.}$$

De plus, en différentiant les équations

$$x = \mathrm{R}(\omega - \sin\omega) \quad \text{et} \quad y = \mathrm{R}(1 - \cos\omega),$$

on trouve

$$dx = \mathrm{R}(1 - \cos\omega)d\omega = y\,d\omega, \quad dy = \mathrm{R}\sin\omega\,d\omega,$$

d'où

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{R \sin \omega}{y} = \pm \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{y} = \pm \sqrt{\frac{2R}{y} - 1},$$

et l'on aura par suite,

$$S_t = y\sqrt{\frac{y}{2R - y}}, \quad S_n = \sqrt{2Ry - y^2} = \sqrt{y(2R - y)},$$

$$T = y\sqrt{\frac{2R}{2R - y}}, \quad N = \sqrt{2Ry}.$$

On conclut facilement de ces valeurs, que si dans le cercle générateur de la cycloïde, on trace un diamètre parallèle à l'axe des y, les directions de la normale et de la tangente à cette courbe au point $M(x, y)$ seront données par les droites menées de ce point aux deux extrémités de ce diamètre, de sorte que la longueur appelée normale sera précisément la corde MN qui dans le cercle générateur sous-tend l'angle ω.

VINGT-UNIÈME LEÇON.

Asymptotes des courbes planes. — Propriétés diverses des courbes planes déduites de leurs équations. — Points singuliers.

110. On appelle asymptote d'une courbe plane, une droite de laquelle cette courbe s'approche indéfiniment sans pouvoir jamais la rencontrer. Il est facile de trouver les asymptotes d'une courbe représentée par une équation quelconque $y = F(x)$ ou $f(x, y) = 0$. En effet, considérons d'abord les asymptotes non parallèles à l'axe des y, et soit $y = \alpha x + 6$ l'équation de l'une d'entre elles. L'ordonnée correspondante de la courbe devant se réduire sensiblement pour de très grandes valeurs numériques de x, à l'ordonnée de l'asymptote, elle se présentera sous la forme $y = \alpha x + 6 \pm \varepsilon$, ε étant une quantité qui s'évanouira pour $x = \pm \infty$. Cela posé, l'équation qui précède donne

$$\alpha = \frac{y}{x} - \frac{6}{x} \mp \frac{\varepsilon}{x},$$

d'où, en faisant $x = \pm \infty$, et remarquant que si 6 était infini, l'asymptote située à une distance infinie disparaîtrait tout entière, on aura

$$\alpha = \lim. \frac{y}{x}.$$

Donc, pour déterminer la constante α, il suffira de poser

dans l'équation de la courbe, $\frac{y}{x} = s$ ou $y = sx$; puis de déterminer la limite ou les limites vers lesquelles convergera la variable s, tandis que la valeur numérique de x croîtra indéfiniment. Après avoir trouvé la constante α, on tirera de l'équation $y = \alpha x + 6 \pm \varepsilon$,

$$6 = y - \alpha x \mp \varepsilon,$$

et en faisant $x = \pm \infty$, $6 = \lim. (y - \alpha x)$, de sorte que pour avoir 6, il faudra, dans l'équation de la courbe, poser $y - \alpha x = t$, et chercher ce que devient t pour $x = \pm \infty$; à chaque système de valeurs des quantités α, 6, correspondra une asymptote de la courbe proposée.

En raisonnant de la même manière, mais en échangeant l'une contre l'autre les variables x, y, on trouverait évidemment les asymptotes non parallèles à l'axe des x.

111. *Scolie.* En général, le rapport $\frac{y}{x}$ pour $x = \infty$, prendra la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, et sa véritable valeur sera celle que prend pour $x = \infty$, l'expression $\frac{y'}{1}$ ou y'; on aura donc alors $\alpha = y'$. Dans ce cas aussi 6 sera déterminé par l'équation $6 = y - y'x$, dans laquelle on fera $x = \infty$; or, si l'on se rappelle que l'équation de la tangente en un point (x, y) est

$$\eta - y = y'(\xi - x) \quad \text{ou} \quad \eta = y'\xi + y - y'x,$$

on reconnaîtra facilement que l'asymptote d'une courbe plane est une tangente dont le point de contact avec la courbe s'éloigne à une distance infinie. Cette remarque peut dans certains cas faciliter la recherche des asymptotes, puisque, pour avoir leur équation, il suffira de

chercher ce que devient l'équation de la tangente quand le point de contact s'éloigne à l'infini.

112. *Applications :* 1°. à la logarithmique $y = a^x$,

$$\alpha = \lim. \frac{y}{x} = \lim. \frac{a^x}{x};$$

et en posant

$$x = -\infty, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \lim. y = \lim. a^x = a^{-\infty} = 0,$$

la courbe proposée aura donc pour asymptote l'axe des x dont elle s'approche indéfiniment du côté des x négatifs.

On prouvera de même que la logarithmique $x = a^y$ a pour asymptote l'axe des y;

2°. à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$\alpha = \lim. \frac{y}{x} = \lim. \pm \frac{b}{a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm \frac{b}{a},$$

$$\beta = \lim. (y - \alpha x) = \lim. \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a} x\right) = 0;$$

il y a donc deux asymptotes déterminées par l'équation

$$y = \pm \frac{b}{a} x;$$

3°. à toute courbe dont l'équation peut se décomposer en plusieurs parties dont chacune soit une fonction homogène des variables x, y.

Soient m, n, etc., les degrés de ces fonctions homogènes, de sorte que l'équation de la courbe soit

$$f(x, y) = x^m \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \mathrm{f}\left(\frac{y}{x}\right) + \text{etc.} = 0,$$

les nombres m, n, etc., étant rangés par ordre de gran-

deur ; la valeur de $s = \frac{y}{x}$ sera déterminée par l'équation

$$x^m \mathrm{F}(s) + x^n \mathrm{f}(s) + \text{etc.} = 0 \text{ ou } \mathrm{F}(s) + \frac{1}{x^{m-n}} \mathrm{f}(s) + \text{etc.} = 0,$$

d'où l'on tire, en faisant $x = \infty$, et se rappelant qu'alors $s = \alpha$,

$$\mathrm{F}(\alpha) = 0;$$

telle sera donc l'équation qui donnera les valeurs de α. Pour avoir β, faisons dans l'équation de la courbe $y = \alpha x + t$, ce qui donne

$$x^m \mathrm{F}\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + x^n \mathrm{f}\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \text{etc.} = 0;$$

or l'on a, d'après un théorème connu,

$$\mathrm{F}\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) = \mathrm{F}(\alpha) + \frac{t}{x} \mathrm{F}'\left(\alpha + \frac{\theta t}{x}\right),$$

ou, puisque $\mathrm{F}(\alpha) = 0$,

$$\mathrm{F}\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} \mathrm{F}'\left(\alpha + \frac{\theta t}{x}\right);$$

on aura donc, en substituant,

$$t x^{m-1} \mathrm{F}'\left(\alpha + \frac{\theta t}{x}\right) + x^n \mathrm{f}\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \text{etc.} = 0,$$

$$t \mathrm{F}'\left(\alpha + \frac{\theta t}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n-1}} \mathrm{f}\left(\alpha + \frac{t}{x}\right) + \ldots = 0,$$

et si, dans cette dernière équation, on pose $x = \infty$, et par suite $t = \beta$, on en conclura, si $\mathrm{F}'(\alpha)$ et $\mathrm{f}(\alpha)$ ont des valeurs finies différentes de 0,

1°. Pour $n < m - 1$, $\beta = 0$;

2°. Pour $n = m - 1$, $\beta = -\frac{\mathrm{f}(\alpha)}{\mathrm{F}'(\alpha)}$;

3°. Pour $n > m - 1$, $\beta = \pm \infty$.

Par conséquent, à la valeur adoptée de α correspondra, dans la première hypothèse, une asymptote passant par l'origine, ou de la forme

$$y = \alpha x,$$

et dans la seconde, une asymptote de la forme

$$y = \alpha x - \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)};$$

dans la troisième hypothèse, l'asymptote s'éloignant à une distance infinie, disparaît entièrement.

Dans la première hypothèse les équations $y = \alpha x$, $F(\alpha) = 0$, donnent encore pour l'équation des asymptotes, $F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, ou $x^m F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, de sorte que quand l'équation de la courbe est décomposable en plusieurs fonctions homogènes, et que le degré m de l'une d'entre elles surpasse de plus d'une unité les degrés de toutes les autres, non-seulement toutes les asymptotes passent par l'origine, mais elles sont toutes représentées par l'équation que l'on obtient en égalant à 0 la fonction homogène du degré m.

Exemple : Si l'on suppose $B^2 - 4AC > 0$, on reconnaîtra que l'hyperbole

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = K$$

a pour asymptotes les deux droites représentées par l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

Dans la deuxième hypothèse, les asymptotes sont données par les équations

$$F(\alpha) = 0, \quad y = \alpha x - \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)},$$

les droites passant par l'origine et représentées par les

équations $F(\alpha)=0$, $y=\alpha x$, ou par la formule

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=0,\quad x^m F\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

sont seulement parallèles aux asymptotes.

Exemple :

Dans le folium de Descartes, $x^3+y^3-3axy=0$, l'asymptote sera parallèle à la droite $x^3+y^3=0$, ou $x+y=0$. Dans ce cas, $\alpha=-1$; en partant de cette valeur on trouvera

$$6=-\frac{f(-1)}{F'(-1)}=-\frac{3a}{3}=-a;$$

et l'asymptote aura définitivement pour équation

$$y=-x-a.$$

Corollaire. Ce que nous venons de dire s'applique évidemment aux courbes dont l'équation a pour premier membre un polynome entier. De plus, si dans ce cas la courbe a un centre, en le prenant pour origine des coordonnées, son équation ne devra contenir que des termes de degré pair ou des termes de degré impair. Dès-lors le degré m de la première fonction homogène surpassera de plus d'une unité le degré n de la deuxième fonction, et les asymptotes non parallèles aux axes passeront par la nouvelle origine. On arrive ainsi à ce théorème remarquable, que dans les courbes dont l'équation est algébrique, les asymptotes non parallèles aux axes passent généralement par le centre.

Ces conclusions supposent que les quantités $F'(\alpha)$, $f(\alpha)$ ne deviennent ni nulles ni infinies : s'il en était autrement la quantité 6 pourrait obtenir des valeurs différentes de celles que nous lui avons assignées; mais pour les déterminer il suffit toujours de chercher la limite ou les limites vers lesquelles converge t pendant que x croît indéfiniment.

113. Certains points des courbes présentent des particularités remarquables dépendantes de la position des axes coordonnés, ou inhérentes à la nature même de la courbe, et qu'il importe de mettre en évidence. Remarquons d'abord que, l'équation d'une courbe étant $f(x,y)=0$, si on la résout par rapport à y, on en tirera une ou plusieurs équations de la forme $y=\mathrm{F}(x)$, et chacune de celles-ci représentera une ligne ou portion de ligne dont les propriétés dépendront de la nature de la fonction $\mathrm{F}(x)$. Or, 1° si cette fonction demeure continue entre les limites $x=x_0$, $x=\mathrm{X}$, la ligne représentée par l'équation $y=\mathrm{F}(x)$ sera elle-même continue entre ces limites; mais elle pourra devenir discontinue, si la fonction $\mathrm{F}(x)$ offre des solutions de continuité, par exemple lorsque cette fonction deviendra infinie pour certaines valeurs finies de x, ou lorsqu'elle passera tout-à-coup du réel à l'imaginaire, ou lorsqu'elle changera brusquement de valeur; le premier cas se présente dans l'hyperbole $y=\frac{a}{x}$, le second dans les courbes logarithmiques $y=\frac{1}{\mathrm{l}x}$, $y=x\mathrm{l}x$; le troisième dans la ligne déterminée par l'équation $y=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$, qui se réduit à $y=1$, si x est positif, et à $y=-1$, si x est négatif.

2°. Dans le cas où la fonction $\mathrm{F}(x)$ et sa dérivée $\mathrm{F}'(x)$ resteront continues, les ordonnées maxima et minima ne répondront qu'à des valeurs de x propres à vérifier l'équation $y'=\mathrm{F}'(x)=0$; et une valeur de x tirée de cette équation fournira effectivement un maximum ou un minimum dans le cas où la première des dérivées $\mathrm{F}''(x)$, $\mathrm{F}'''(x)$... qui cessera de s'évanouir, sera positive ou négative, mais d'ordre pair. Si au contraire certaines valeurs de x rendent la fonction discontinue, elles pourront pro-

duire des maxima ou des minima sans vérifier l'équation $F'(x) = 0$.

3°. La valeur numérique de la fonction $F'(x)$ représente, comme nous l'avons vu, la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x : cette tangente sera donc parallèle ou perpendiculaire à l'axe des x, suivant que l'on aura $F'(x)=0$ ou $F'(x)=\infty$. Et si la fonction dérivée change brusquement de valeur, il en sera de même de l'inclinaison de la tangente.

114. On désigne exclusivement sous le nom commun de *points singuliers*, tous les points qui se trouvent situés sur une courbe, de manière à offrir quelques particularités dignes de remarque, inhérentes à la nature de ces mêmes courbes, et indépendantes de la position des axes coordonnés. Ainsi, 1° si la fonction $f(x, y)$ ne devient réelle que pour un nombre limité de valeurs de x, l'équation $f(x, y)=0$ ne représentera qu'un point ou une suite de *points isolés*. Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = 0$ ne représente qu'un seul point qui coïncide avec l'origine. Il peut arriver que l'équation $f(x, y) = 0$ fournisse en même temps un ou plusieurs points isolés et une ou plusieurs branches de courbe.

1er *Exemple :*

$$y^2 = x^2(x^2 - a^2),$$

2me *Exemple :*

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0.$$

2° Lorsque la fonction $f(x, y)$ passe tout-à-coup du réel à l'imaginaire, ou change brusquement de valeur, la ligne que l'on considère s'arrête tout-à-coup en certains points que l'on appelle *points d'arrêt.*

Exemple : Les deux logarithmes $y = \frac{1}{lx}$, $y = xlx$ ont chacune pour point d'arrêt l'origine des coordonnées.

La ligne $y = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$ offre deux points d'arrêt situés sur l'axe des y de part et d'autre de l'origine et à l'unité de distance.

3°. Lorsque la fonction $f(x,y)$ restant continue, la dérivée y' change brusquement de valeur, les deux branches de la courbe viennent se réunir en un point donné, de manière que leurs tangentes forment entre elles un certain angle. Ce point s'appelle un *point saillant*. Tel est, par exemple, le point correspondant à $x = 0$ dans les courbes représentées par les équations

$$y = \sqrt{x^2}, \quad y = x \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}, \quad y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

4°. Si les deux branches d'une même courbe s'arrêtent en un point donné, de manière à toucher l'une et l'autre une droite ou demi-axe aboutissant au point dont il s'agit, ce point sera ce qu'on appelle un *point de rebroussement*. Le rebroussement sera de première espèce si le demi-axe passe entre les deux branches de la courbe, et de seconde espèce si le demi-axe laisse les deux branches d'un même côté.

Exemple : La cycloïde offre une infinité de points de rebroussement de première espèce, tous situés sur l'axe des x, et correspondant aux abscisses

$$x = 0, \quad x = \pm 2\pi R, \ldots\ldots \quad x = \pm 2n\pi R.$$

5°. On appelle *points multiples* ceux auxquels viennent se rencontrer deux ou plusieurs branches de courbe qui ne s'arrêtent pas toutes à ces mêmes points, ou auxquels aboutissent, pour s'y arrêter, au moins trois branches différentes.

1[er] *Exemple :* La courbe $y^2 = x^2(1 - x^2)$ est formée de deux branches qui se croisent à l'origine en touchant les droites $y = -x$, $y = x$.

2[me] *Exemple :* La courbe $y^2 = x^4(1 - x^2)$ est formée de deux branches tangentes toutes deux à l'axe des x. L'origine des coordonnées est pour ces deux courbes un point multiple.

6°. Lorsqu'en un certain point la courbe et la tangente se traversent mutuellement, ce point est ce qu'on nomme un *point d'inflexion.*

115. Telles sont les six espèces de points singuliers que peuvent présenter les courbes algébriques et transcendantes. On peut souvent les mettre en évidence et reconnaître leur nature à l'aide des conditions analytiques suivantes. Nous exclurons d'abord le cas où l'un des coefficients différentiels serait infini.

Théorème 1[er]. Si un point M, dans le voisinage duquel la fonction $u = f(x, y)$ et ses dérivées du premier ordre $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$ restent finies et continues, est dans la courbe représentée par l'équation $u = f(x, y) = 0$, un point isolé ou un point d'arrêt, ou un point saillant, ou un point de rebroussement de première ou de seconde espèce, les coordonnées de ce point devront vérifier les deux équations $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$.

Démonstration. Dans ces quatre hypothèses, on pourra par le point M faire passer un nombre indéfini de droites PP′ telles que dans le voisinage de ce point, on ne puisse trouver d'un côté au moins de cette droite (*fig.* 4, 5, 6, 7), ou même des deux côtés (*fig.* 3), aucun point qui appartienne à la courbe dont il s'agit. En conséquence, deux points situés sur cette droite, de part et d'autre du point M, pouvant être joints l'un à

l'autre par une nouvelle courbe PQ qui ne rencontre pas la première AB dont l'équation est $u = f(x, y) = 0$, les valeurs de u correspondantes à ces deux points seront nécessairement des quantités de même signe. En effet, pendant que l'on passe du point P au point Q, sur la courbe PQ, la fonction $u = f(x, y)$ que l'on suppose continue, ne pourrait pas changer de signe sans s'évanouir; or elle ne peut pas s'évanouir puisque la courbe PQ ne rencontre pas la courbe AMB dont les coordonnées vérifient seules, par hypothèse, l'équation $u = f(x, y) = 0$, donc elle ne changera pas de signe. Cela posé, la fonction $u = f(x, y)$, variable d'un point à l'autre sur la droite PMQ, qui s'évanouit au point M, et conserve le même signe en P et en Q de part et d'autre de ce point, sera nécessairement en ce point un maximum ou un minimum, suivant que les valeurs de u en P et en Q seront négatives ou positives. Dans les deux cas on devra avoir

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0,$$

ou

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

D'un autre côté, en appelant a la tangente de l'angle que la droite arbitraire PMQ fait avec les axes, son équation, à laquelle devront satisfaire les coordonnées x, y du point M, sera $y = ax + b$, d'où l'on tirera

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

on aura donc en substituant

$$\frac{du}{dx} + a\frac{du}{dy} = 0;$$

et parce que cette dernière équation devra subsister pour

un nombre indéterminé de valeurs de a, il faudra nécessairement que l'on ait

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0.$$

Les coordonnées des points isolés, des points d'arrêts, des points saillants et des points de rebroussement devront donc satisfaire à la fois aux trois équations

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0.$$

De deux de ces équations on tirera les valeurs de x et de y, pour les substituer dans la troisième. Si un couple de valeurs $x = x_0$, $y = y_0$ vérifie à la fois ces trois équations, le point correspondant, ou qui aurait x_0 et y_0 pour coordonnées, pourra être, mais ne sera pas toujours un point singulier.

116. Pour reconnaître la nature de ce point, remarquons d'abord que l'équation différentielle première

$$\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} = 0,$$

devenant identique quand il s'agit d'un des quatre points singuliers dont il est question dans le théorème précédent, il faudra, pour obtenir la tangente de l'angle que la touchante à la courbe fait avec les axes, recourir à l'équation différentielle du second ordre, laquelle, à cause des conditions $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, se réduit à

$$\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{d^2u}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Supposons encore que l'on ait ramené à la forme $y = F(x)$ l'équation de la branche de courbe sur laquelle se trouve le point singulier dont on veut connaître la nature.

Dès-lors, I. Le point $x = x_0$, $y = y_0$ sera un point isolé, 1° si les deux ordonnées $F(x_0 + h)$, $F(x_0 - h)$ sont toutes deux imaginaires; 2° si à ce point la courbe n'a point de tangente, ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} < 0,$$

si l'on n'a pas

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

II. Le point $x = x_0$, $y = y_0$ sera un point d'arrêt, 1° si l'une seulement des coordonnées $F(x_0 + h)$, $F(x_0 - h)$ est imaginaire; 2° si la courbe en ce point n'a qu'une tangente, et si par conséquent les coordonnées de ce point vérifient l'équation $\frac{d^2u}{dy^2} = 0$.

III. Le point $x = x_0$, $y = y_0$ sera un point saillant, 1° si à chacune des abscisses $x = x_0 + h$, $x = x_0 - h$ répond une seule ordonnée très peu différente de y_0, ou si à l'une de ces abscisses répondent seulement deux ordonnées sensiblement égales à y_0; 2° si la courbe au point x_0, y_0 a réellement deux tangentes, ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} > 0.$$

IV. Enfin, le point x_0, y_0 ne pourra être un point de rebroussement qu'autant que la première condition exigée pour le point saillant étant remplie, les deux tangentes en ce point coïncideront en une seule, ce qui ne peut avoir lieu sans qu'on ait

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} = 0.$$

117. Théorème 2me. Si la courbe représentée par l'équa-

tion $u=f(x, y)=0$ offre un point multiple, c'est-à-dire un point dans lequel se réunissent, sans s'y arrêter, deux branches de la courbe, ou trois branches au moins pour s'y arrêter, les coordonnées de ce point vérifieront encore les équations $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{du}{dy}=0$.

Démonstration. En effet, considérons (*fig.* 8) deux branches de courbe qui se réunissent au point M, et coupons ces deux branches dans le voisinage de ce point par une droite PQ qui fasse avec l'axe des x un angle quelconque dont la tangente soit a, et qui ait pour équation

$$y=ax+b;$$

si x et y sont les coordonnées du point P, celles du point Q pourront être représentées par $x+\Delta x=x+\alpha dx$, $y+\Delta y=y+\alpha dy$, de sorte que l'équation $u=f(x, y)=0$ devra être satisfaite à la fois et par x, y et par $x+\Delta x$, $y+\Delta y$. Mais si dans u on change x en $x+\Delta x$, y en $y+\Delta y$, u devient $u+\Delta u$; on aura donc à la fois, et quel que soit Δx, $u=0$, $u+\Delta u=0$, d'où $\Delta u=0$, et par conséquent $du=\lim.\frac{\Delta u}{\alpha}=0$, ou

$$du=\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=0;$$

mais les coordonnées x, y, satisfaisant à l'équation

$$y=ax+b,$$

on a

$$\frac{dy}{dx}=a,$$

on aura donc aussi

$$\frac{du}{dx}+a\frac{du}{dy}=0,$$

et cela quel que soit a, ce qui entraîne les deux équations

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0;$$

donc, etc.

Scolie. Si trois branches de la courbe venaient à se réunir au point M, la droite PQ couperait la courbe en trois points dont les coordonnées pourraient être représentées par

$$x,\ y;\quad x+\Delta x,\quad y+\Delta y;\quad x+2\Delta x+\Delta^2 x,\quad y+2\Delta y+\Delta^2 y.$$

On devrait donc avoir, quel que fût a, non-seulement $u=0$, $\Delta u=0$, mais $\Delta^2 u=0$, d'où $du=0$, $d^2u=0$,

$$\frac{du}{dx}+a\frac{du}{dy}=0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2a\frac{d^2u}{dxdy}+a^2\frac{d^2u}{dy^2}=0.$$

Or ces équations ne peuvent subsister qu'autant qu'on aura à la fois

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0,\quad \frac{d^2u}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2u}{dxdy}=0,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=0.$$

En général, on démontrera de la même manière que la réunion de n branches de courbe au point multiple M, entraîne les conditions

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2u}{dxdy}=0,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}=0,\quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-2}dy}=0,\ldots\ldots\quad \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}=0,$$

auxquelles devront satisfaire les coordonnées x, y du point multiple m.

118. THÉORÈME 3me. Les coordonnées d'un point d'inflexion devront toujours vérifier l'équation $y''=\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

Démonstration. Supposons que l'équation de la courbe ait été mise sous la forme $y=F(x)$, la différence δ entre les ordonnées

$$y=F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(x+\theta h),$$
$$\eta=y+y'h=F(x)+hF'(x),$$

de la courbe et de la tangente qui répondent à l'abscisse $x+h$, est donnée par l'équation

$$\delta=\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x+\theta h).$$

Quand h est très petit, le premier terme l'emporte sur la somme de tous les autres, et par conséquent, entre les abscisses x et $x+h$, l'ordonnée de la courbe sera constamment supérieure ou constamment inférieure à celle de la tangente, suivant que la dérivée seconde $F''(x)$ sera, dans ce même intervalle, constamment positive ou constamment négative. De plus, la tangente et la courbe se traverseront au point (x, y) qui, dans ce cas, deviendra un point d'inflexion, lorsque dans le passage de $x-h$ à $x+h$, $F''(x)$ changera de signe. Or si la fonction $y=F(x)$ reste continue, ainsi que ses dérivées successives, dans le voisinage du point (x, y), $F''(x)$ ne pourra changer de signe sans s'évanouir; les coordonnées d'un point d'inflexion vérifieront donc, dans cette hypothèse, l'équation $F''(x)=0$. Pour que la différence δ change réellement de signe, il faudra en outre évidemment que des dérivées successives $F'''(x)$, $F^{IV}(x)$, etc., celle qui la première cessera de s'évanouir soit une dérivée d'ordre impair. Ainsi pour trouver

les points d'inflexion, on cherchera les racines communes aux deux équations $y=F(x)$, $F''(x)=0$; ou $f(x,y)=0$, $y''=0$. Un système de valeurs $x=x_0$, $y=y_0$, tiré de ces équations, répondra réellement à un semblable point, si la première des dérivées qui ne devient pas nulle pour $x=x_0$, $y=y_0$ est une dérivée d'ordre impair.

119. Dans cette discussion nous avons toujours supposé que $y'=\frac{dy}{dx}$ ne devenait pas infini ou que la tangente n'était pas perpendiculaire à l'axe des x. Si le cas se présentait, il serait facile de déterminer la nature du point dont les coordonnées $x=x_0$, $y=y_0$ satisferaient à l'équation $\frac{dy}{dx}=\infty$. En effet, dans cette hypothèse, les deux quantités $F(x_0+h)$ et $F(x_0-h)$ peuvent être toutes deux réelles, ou l'une réelle et l'autre imaginaire.

I. Si toutes deux sont réelles et toutes deux plus grandes ou plus petites que $F(x_0)$, le point en question sera un point de rebroussement de première espèce; si l'une est plus grande et l'autre plus petite que $F(x_0)$, le point sera un point d'inflexion;

II. Si l'une de ces quantités, par exemple $F(x_0-h)$, est réelle et l'autre imaginaire, alors, 1° si $F(x_0-h)$ a une seule valeur, le point sera un point d'arrêt; 2° si $F(x_0-h)$ a deux valeurs, toutes deux plus grandes ou toutes deux plus petites que $F(x_0)$, le point sera un point de rebroussement de seconde espèce; 3° si l'une des valeurs de $F(x_0-h)$ est plus grande et l'autre plus petite que $F(x_0)$, le point dont il s'agit sera une simple limite de la courbe;

III. Enfin, si l'une des quantités $F(x_0+h)$, $F(x_0-h)$ ou toutes deux avaient trois ou un plus grand nombre de valeurs, le point en question serait en général à la fois et un point multiple et un point d'inflexion.

En résumé, on obtiendra les coordonnées des points singuliers des courbes, en cherchant dans quels cas les coefficients différentiels deviennent nuls, ou infinis, ou $\frac{0}{0}$. On assignera l'espèce du point, 1° en examinant combien il y passe de branches de la courbe, et si elles s'étendent ou non, en-deçà et au-delà; 2° en déterminant la position de la tangente ou des tangentes correspondantes en ce point.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

Moyen de déterminer quand une courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers les axes des coordonnées. — Analyse d'une courbe ou discussion de son équation. — Différentielle de l'arc d'une courbe.

---

120. Il est quelquefois nécessaire de reconnaître si une courbe tourne sa convexité ou sa concavité vers les axes des coordonnées, or l'on peut donner à ce sujet des règles générales et d'une application facile.

Il est certain d'abord que si la fonction $y = \mathrm{F}(x)$, et sa dérivée $y' = \mathrm{F}'(x)$ restent l'une et l'autre continues pour toutes les valeurs de x comprises entre les abscisses de deux points donnés, la corde qui joindra ces deux points sera parallèle à l'une des tangentes menées par les points intermédiaires de la courbe.

En effet, si l'on représente par x et $x+\Delta x$ les abscisses des deux points dont il s'agit, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)}{\Delta x} = \mathrm{F}'(x+\theta\Delta x).$$

Or $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x la corde qui unit les deux points (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$; $\mathrm{F}'(x+\theta\Delta x)$ est la tangente de l'angle que fait avec le même axe la touchante à la courbe, menée par le point intermédiaire qui aurait pour abscisse $x+\theta\Delta x$; la sécante

est donc parallèle à l'une des tangentes intermédiaires.

121. On dit qu'une courbe ou portion de courbe est convexe entre deux points donnés, lorsque, entre ces points, elle ne peut être rencontrée plus de deux fois par une même droite. Or une courbe sera convexe toutes les fois que l'ordonnée y et sa dérivée y' seront deux fonctions continues de l'abscisse x, dont la seconde croisse ou décroisse constamment tandis que l'abscisse augmente. En effet, si (*fig.* 9) elle pouvait être coupée par une droite en trois points différents M, N, P, on pourrait, d'après ce que nous venons de dire, mener deux tangentes parallèles à cette droite par deux certains points m, n, situés l'un entre les points M et N, l'autre entre les points N et P, et par conséquent y' reprendrait au point n la même valeur qu'au point m, ce qui est contre l'hypothèse.

Au contraire, il est clair qu'une courbe qui renferme un point d'inflexion ne saurait être convexe. En effet, après avoir tracé (*fig.* 10) la tangente qui passe par le point d'inflexion M, menons de ce point à deux points N et P, les rayons vecteurs MN, MP, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la tangente; celui de ces rayons MN qui fait le plus petit angle avec la tangente passera évidemment, si on le prolonge, entre la tangente et l'autre rayon, et rencontrera de nouveau la courbe en un point n; cette droite MN aura donc trois points de commun avec la courbe qui, par suite, ne sera pas convexe.

122. Il suit encore des principes ci-dessus établis, que pour décider si une courbe tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des x, en un point pour lequel y et y'' obtiennent des valeurs différentes de zéro, il suffit d'examiner si ces valeurs sont des quantités de même signe ou de signes contraires; c'est-à-dire si le produit yy'' est positif ou négatif. En effet, en supposant h très petit la différence δ entre l'ordonnée de la courbe et celle de la tan-

gente est (n° 118) de même signe que y''. Or pour que la courbe tourne sa convexité vers l'axe des x, il faut, 1° si y est positif que la courbe soit au-dessus de sa tangente ou que δ et y'' soient positifs; 2° si y est négatif, que la courbe soit au-dessous de sa tangente ou que δ et y'' soient négatifs : au contraire, pour qu'une courbe tourne sa concavité vers l'axe des x, il faut, suivant que y est négatif ou positif, que la courbe soit située au-dessus ou au-dessous de sa tangente, c'est-à-dire que δ et y'' soient positifs dans le premier cas et négatifs dans le second. Donc, etc.

123. Quand on veut faire l'analyse d'une courbe donnée par l'équation $f(x, y) = 0$, examiner sa nature, ses propriétés, etc., il faut, 1° chercher les points où elle rencontre les axes; 2° quand on le peut, résoudre l'équation pour en tirer une ou plusieurs valeurs de la forme $y = F(x)$, $y = \mathrm{f}(x)$; chacune de ces dernières équations représentera une branche de la courbe donnée : il faut au moins déterminer autant que possible combien de valeurs de y répondent à chaque valeur de x, ou combien de valeurs de x répondent à chaque valeur de y; 3° examiner entre quelles limites les coordonnées sont réelles, et si la courbe a des branches infinies; 4° calculer, en prenant la dérivée, l'angle que la tangente fait en général avec les axes, fixer les points où cette tangente est horizontale ou verticale, s'il y a des maxima ou des minima; 5° trouver s'il y a des asymptotes et quelle est leur équation; 6° voir enfin si elle admet des points singuliers, et de quelle nature ils sont.

1er *Exemple :* Discuter la courbe

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0.$$

Cette courbe (*fig.* 11) s'appelle le folium de Descartes : 1° elle rencontre les axes à l'origine seulement; 2° à chaque valeur positive de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a\sqrt[3]{4}$, répondent trois valeurs de l'ordonnée y; depuis $x = a\sqrt[3]{4}$

jusqu'à $x = \infty$, une seule des valeurs de y est réelle, les deux autres sont imaginaires; enfin, à chaque valeur négative de x répond une seule valeur positive de y, qui croît indéfiniment avec x : 3° la courbe a deux branches infinies, situées l'une au-dessous, l'autre au-dessus de l'axe des x : 4° la tangente en un point quelconque fait, avec l'axe des x, un angle τ déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang} \tau = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

la tangente est horizontale à l'origine et au point qui a pour coordonnées $x = a\sqrt[3]{4}$, $y = a\sqrt[3]{2}$: cette dernière ordonnée est un maximum; la tangente est verticale à l'origine et au point $x = a\sqrt[3]{4}$, $y = a\sqrt[3]{2}$: 5° la courbe a, comme nous l'avons déjà prouvé, une asymptote dont l'équation est $y = -x - a$: 6° l'origine est un point double; les deux tangentes en ce point sont l'une verticale, l'autre horizontale : 9° si l'on prenait pour axes des coordonnées une parallèle et une perpendiculaire à l'asymptote menée par l'origine, l'équation de la courbe deviendrait

$$y^2(3a + 3x\sqrt{2}) = 3ax^2 - x^3\sqrt{2};$$

à chaque valeur de x répondraient deux valeurs de y égales et de signe contraire; l'axe des x serait un axe principal.

2me *Exemple* : Discuter la courbe

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0.$$

Cette courbe (*fig.* 12), 1° rencontre l'axe des x à l'origine et aux points $x = \pm a\sqrt{10}$, l'axe des y à l'origine et aux points $y = \pm 4a\sqrt{6}$; 2° En résolvant, par rap-

port à y, on trouve

$$y = \pm\sqrt{48a^2 \pm \sqrt{(x-6a)(x+6a)(x-8a)(x+8a)}}:$$

3°. Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 6a$, à chaque valeur de x répondent quatre valeurs de y égales deux à deux, et de signes contraires; depuis $x = 6a$ jusqu'à $x = 8a$, l'ordonnée est imaginaire; la courbe n'a qu'un point dans cet intervalle; depuis $x = 8a$ jusqu'à $x = 10a$, l'ordonnée reprend quatre valeurs réelles; enfin, depuis $x = 10a$ jusqu'à $x = \infty$, deux seulement des valeurs de y sont réelles; la courbe s'étend à l'infini au-dessus et au-dessous de l'axe des x; elle est symétrique par rapport aux axes qui sont des axes principaux; la portion à gauche est entièrement semblable à la portion située à droite : 4°. La touchante, en un point quelconque, fait avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 50a^2x}{y^3 - 48a^2y}.$$

Au point $x = 0$, $y = \pm 4a\sqrt{6}$, la tangente est horizontale: elle est verticale aux huit points qui ont pour coordonnées

$$x = +6a,\quad y = \pm 4a\sqrt{3};\quad x = -6a,\quad y = \pm 4a\sqrt{3},$$
$$x = +8a,\quad y = \pm 4a\sqrt{3};\quad x = -8a,\quad y = \pm 4a\sqrt{3}:$$

5°. La courbe a deux asymptotes passant par l'origine, qui est son centre, et dont les équations sont $y = x$, $y = -x$. De sorte que leur position est indépendante de la constante ou du paramètre a : 6° l'origine est un point double; à ce point la courbe est touchée par deux droites faisant avec l'axe des x des angles dont les tangentes trigonométriques sont respectivement égales à $+\sqrt{\frac{50}{48}}$ et $-\sqrt{\frac{50}{48}}$; la courbe a, de plus, quatre points d'inflexion qui sont clairement indiqués par la marche de ses bran-

ches; mais il serait difficile de déterminer leurs coordonnées, à cause du degré élevé de l'équation dont elles sont racines.

3me *Exemple :* Discuter l'équation

$$y = b + c(x-a)^m;$$

déterminer sa nature et ses points singuliers suivant que m sera un nombre pair $2n$, ou un nombre impair $2n+1$; ou une fraction de dénominateur pair et de numérateur impair $\frac{2n+1}{2p}$, ou une fraction de numérateur pair et de dénominateur impair $\frac{2n}{2p+1}$, ou enfin une fraction $\frac{2n+1}{2p+1}$ dont le numérateur et le dénominateur soient à la fois impairs.

4me *Exemple :* Discuter la courbe

$$y^4 - x^4 + 2bx^2y = 0.$$

Cette courbe (*fig.* 13) est formée de deux parties situées l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe des x, et symétriques par rapport à l'axe des y; la première branche touche à l'origine l'axe des x, la seconde a pour tangente l'axe des y; l'origine est pour la courbe un point triple, et pour la branche inférieure un point de rebroussement; l'une et l'autre partie ont pour asymptotes les deux droites

$$y = x - \frac{b}{2}, \quad y = -x - \frac{b}{2},$$

qui rencontrent l'axe des y au même point et font, avec l'axe des x, un angle de 45°.

5me *Exemple :* Discuter la courbe

$$y^4 + x^4 - 2ay^3 - 2bx^2y = 0.$$

L'origine est (*fig.* 14), pour cette courbe, un point triple.

6[me] *Exemple.* Discuter la courbe

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6axy^2 - 2ax^3 + 2a^2x^2 = 0 \text{ (fig. 15)}.$$

L'origine et le point $y=0$, $x=a$ sont deux points doubles.

124. L'arc s d'une courbe $f(x, y) = 0$, ou $y = F(x)$, compté à partir d'un point fixe quelconque A jusqu'au point M, est évidemment une fonction de l'abscisse x de ce point. Cette fonction, comme nous le verrons par la suite, est très difficile à déterminer : on n'y parvient que dans un très petit nombre de cas; mais il n'en est pas ainsi de sa différentielle, que l'on obtient très facilement et dans tous les cas possibles. En effet, considérons sur la courbe (*fig.* 16) un deuxième point M′ dont l'abscisse soit $x + \Delta x$, $MM' = \Delta s$ sera l'accroissement de l'arc $AM = s$; on pourra d'ailleurs prendre Δx assez petit pour que dans cet intervalle la fonction dérivée $y' = F'(x)$ ne changeant pas de signe, l'arc MM′ soit convexe.

Cela posé, menons la tangente au point M, elle fera avec l'axe des x un angle $NMQ = \tau$ dont la tangente trigonométrique, le sinus et le cosinus sont

$$y', \quad \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Prolongeons enfin cette tangente jusqu'à ce qu'elle rencontre en N l'ordonnée M′P′, prolongée s'il est nécessaire. L'arc convexe MmM′ est plus grand que la corde MM′ et plus petit que la ligne enveloppante MNM′; on a donc

$$MmM' > MM', \quad MmM' < MN + NM'.$$

Or

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad MN = \frac{MQ}{\cos NMQ} = \Delta x\sqrt{1+y'^2},$$

$$NM' = NQ - M'Q = MQ \tang NMQ - M'Q = y'\Delta x - \Delta y;$$

on aura donc, en substituant,

$$\Delta s > \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \Delta s < \Delta x\sqrt{1+y'^2} + y'\Delta x - \Delta y,$$

et par suite

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1+y'^2} + y' - \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

A la limite, les seconds membres de ces deux inégalités deviennent égaux entre eux et égaux à

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+y'^2};$$

on aura donc aussi

$$\lim. \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+y'^2},$$

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Telle est donc la différentielle de l'arc d'une courbe quelconque, considéré comme fonction de x. Mais ce que nous venons de trouver n'est que la valeur absolue de ds ou de $\frac{ds}{dx}$; en effet, $\sqrt{1+y'^2}$ est une quantité essentiellement positive, tandis que $\frac{ds}{dx}$ sera positif ou négatif suivant que l'arc croîtra ou décroîtra quand l'abscisse augmentera, c'est-à-dire suivant que les arcs seront comptés dans le sens des x positifs ou dans le sens des x négatifs; on devra donc écrire généralement

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1+y'^2}, \quad ds = \pm\sqrt{dx^2+dy^2},$$

et l'on prendra le signe $+$, si l'arc croît avec l'abscisse, le signe $-$ dans le cas contraire.

Corollaire 1er. D'après ce que nous venons de voir, $\lim. \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 1$; il est donc vrai de dire que lorsqu'un arc de courbe devient infiniment petit, le rapport de cet arc Δs à sa corde $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ devient égal à l'unité.

125. *Corollaire* 2me. Désignons par α, β les angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par la

tangente prolongée dans le sens de la corde MM′, on aura

$$\cos\alpha = \lim. \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \quad \cos\beta = \lim. \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

ou

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}};$$

si dans ces équations on substitue au radical $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ sa valeur $\pm\, ds$, on trouvera

$$\cos\alpha = \pm \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \pm \frac{dy}{ds}:$$

on devra prendre le signe + ou le signe — suivant que la tangente aura été prolongée dans le même sens que l'arc s, ou en sens contraire. En effet, si la tangente est prolongée dans le sens de l'arc, $\cos\alpha$ sera positif si l'arc croît et décroît avec l'abscisse, négatif dans le cas contraire. Mais $\frac{dx}{ds}$, comme nous l'avons dit, est aussi positif dans le premier cas, négatif dans le second; on a donc toujours dans cette hypothèse

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \text{et par suite} \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}.$$

Au contraire, si la tangente est prolongée en sens contraire de l'arc, $\cos\alpha$ sera négatif si l'arc croît et décroît avec l'abscisse, positif dans le cas contraire; mais $\frac{ds}{dx}$ est positif dans le premier cas, négatif dans le second: on devra donc prendre

$$\cos\alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \text{et par suite} \quad \cos\beta = -\frac{dy}{ds}.$$

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

De la courbure, du rayon et du centre de courbure d'une courbe plane.

126. Soit R le rayon d'un cercle qui (*fig.* 17) touche la droite AB au point M. Si le rapport $\frac{1}{R}$ diminue, c'est-à-dire si le rayon R augmente, la portion de la circonférence qui avoisine le point de contact s'approchera sans cesse de la droite AB, sa courbure diminuera; cette courbure serait même sensiblement nulle et le cercle se confondrait sensiblement avec la droite AB si le rayon R était très grand, ou le rapport $\frac{1}{R}$ sensiblement nul. Au contraire, si $\frac{1}{R}$ augmente ou si le rayon diminue, la courbure du cercle augmentera, il s'éloignera de la droite. La courbure d'un cercle augmente donc ou diminue en même temps que le rapport $\frac{1}{R}$; dès-lors il est naturel de prendre ce rapport pour la mesure de la courbure.

Soient d'ailleurs x, y les coordonnées d'un point quelconque M du cercle; τ l'inclinaison de la tangente en ce point; s l'arc compris entre un point fixe et le point (x, y); enfin Δx, Δy, $\Delta\tau$, Δs les accroissements que prennent ces diverses variables quand on passe du point (x, y) à un second point M′ ou $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ assez rapproché pour que l'inclinaison croisse ou décroisse toujours dans l'intervalle de x à $x + \Delta x$.

Cela posé, si (*fig.* 18) nous menons la tangente au point M′ et les deux rayons CM, CM′, on aura immédiatement

$$MM' = \pm \Delta s, \quad T'NM' = MCM' = \pm \Delta\tau;$$

et puisque l'arc est proportionnel à l'angle au centre

$$\Delta s = \pm R\Delta\tau, \quad \frac{1}{R} = \pm \frac{\Delta\tau}{\Delta s},$$

la courbure d'un cercle mesurée par $\frac{1}{R}$ sera donc aussi représentée, en valeur absolue, par le rapport $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$; et comme cette courbure et $\frac{1}{R}$ sont des quantités essentiellement positives, il est évident que dans l'équation $\frac{1}{R} = \pm \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ il faudra prendre le signe + si l'arc s et l'inclinaison τ croissent et décroissent ensemble, le signe — dans le cas contraire.

127. Concevons maintenant qu'il s'agisse non plus d'un cercle, mais d'une courbe quelconque, le rapport $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ ne sera plus dès-lors toujours égal à une quantité constante $\frac{1}{R}$, mais variera, au contraire, d'un point à l'autre sur la courbe dont il s'agit; l'analogie nous force à reconnaître que ces variations ont quelque rapport avec la courbure de l'arc s. Il est du reste évident que plus, pour une même longueur de Δs, l'angle $\Delta\tau$ de deux tangentes consécutives ou l'*angle de contingence* sera grand, plus la courbe s'éloignera de la tangente au point M, plus sa courbure augmentera, et réciproquement; le rapport $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ est donc lié avec la courbure de la courbe, et nous pouvons appeler ce rapport la courbure moyenne de cet arc.

De plus, si le point $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ vient à se rapprocher indéfiniment du point (x, y), le rapport $\pm\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ convergera en général vers une limite déterminée et finie $\pm\frac{d\tau}{ds}$; cette limite qui, quand Δx est très petit, est sensiblement égale à $\pm\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, est donc liée elle-même avec la courbure de la courbe, et nous conviendrons de la prendre pour mesure de cette courbure au point (x, y).

128. Aux points très voisins M et M′ (*fig.* 19), menons deux normales consécutives qui se rencontrent en C; la distance $MC = r$ sera sensiblement égale, et, si l'on passe à la limite, rigoureusement égale au rayon d'un cercle qui aurait pour centre le point de rencontre des deux normales, et qui aurait même courbure que la courbe. En effet, dans le triangle MCM′ l'angle CM′M sera lui-même sensiblement droit et égal à $\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon$, ε étant une quantité très petite qui s'évanouit avec Δx; de plus, l'angle $MCM' = \Delta\tau$: on aura donc, en comparant les sinus des angles aux côtés opposés,

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon\right)}{r} = \frac{\sin \pm \Delta\tau}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

et l'on conclura, en passant à la limite et en appelant ρ la limite de r,

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{dt}{ds};$$

or il résulte évidemment de cette équation que ρ est le rayon d'un cercle dont la courbure serait $\frac{d\tau}{ds}$ ou qui aurait même courbure que la courbe proposée. Ce rayon, porté à partir du point M, sur la normale passant par ce point et prolongée du côté de la concavité, est ce qu'on nomme

le rayon de courbure de la courbe proposée relatif au point dont il s'agit. Son extrémité, qu'on peut regarder comme le point de rencontre de deux normales infiniment voisines, s'appelle le centre de courbure. Enfin le cercle qui a ce dernier point pour centre, et le rayon de courbure pour rayon, se nomme cercle de courbure ou cercle osculateur. Il touche évidemment la courbe donnée, puisqu'il a même normale et même tangente, il a la même courbure qu'elle, et tourne sa concavité du même côté.

129. La courbure $\frac{d\tau}{ds}$ et le rayon de courbure ρ peuvent être présentés sous diverses formes qu'il est bon de connaître.

1°. En prenant x pour variable indépendante, on aura

$$\operatorname{tang}\tau = \pm y', \quad \tau = \pm \operatorname{arc\,tang} y',$$
$$d\tau = \pm \frac{y''}{1+y'^2}\,dx, \quad ds = \pm dx\sqrt{1+y'^2},$$

et par suite, l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d\tau}{ds}$$

donnera

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm y'' \cos^3\tau = \pm \frac{y''}{\operatorname{séc}^3\tau};$$

d'où

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

A l'inspection de cette dernière formule on reconnaît immédiatement, 1° que la courbure devient nulle et le rayon de courbure infini toutes les fois que y'' se réduit à o : alors le cercle osculateur se transforme en une droite et se confond avec la tangente. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour tous les points d'inflexion dans le voisinage desquels

les fonctions y' et y'' restent continues par rapport à x. 2° Si pour un certain point la valeur de y'' devenait infinie, sans que la tangente fût perpendiculaire à l'axe des x, la courbure serait elle-même infinie et le rayon de courbure s'évanouirait; 3° si les quantités y', y'' devenaient toutes deux infinies, la fraction $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ se présenterait sous une forme indéterminée; mais on pourrait fixer sa véritable valeur à l'aide des principes que nous avons établis; 4° si l'une des fonctions y', y'' devient discontinue et change brusquement de valeur, il en sera de même du rayon de courbure; cette circonstance peut se présenter, par exemple, aux points saillants d'une courbe.

Exemples :

$$y = x\left(1 + \text{arc tang}\frac{1}{x}\right),$$

$$y = x^2\left(1 + \text{arc tang}\frac{1}{x}\right), \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

Si l'on se rappelle que la normale N est égale à

$$\frac{y}{\cos\tau} = y\sqrt{1+y'^2},$$

on trouvera

$$\mathrm{N}^3 = y^3(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\mathrm{N}^3}{y^3},$$

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{y^3 y''}{\mathrm{N}^3}, \quad \rho = \frac{\mathrm{N}^3}{y^3 y''};$$

on détermine facilement, à l'aide de cette dernière équation, les rayons de courbure de plusieurs courbes.

1er *Exemple :*

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Cette courbe sera une ellipse, une parabole ou une hy-

perbole, suivant que la quantité q sera négative, nulle, ou positive.

En différentiant cette équation, on trouve

$$yy' = p + qx, \quad y^2y'^2 = p^2 + 2pqx + q^2x^2 = p^2 + qy^2,$$
$$y'^2 = \frac{p^2}{y^2} + q, \quad y''y' = -\frac{p^2y'}{y^3}, \quad y^3y'' = -p^2;$$

l'équation $\rho = \pm \frac{N^3}{y^3y''}$ donnera donc $\rho = \frac{N^3}{p^2}$. Si l'on remet pour N sa valeur

$$N = \sqrt{y^2 + y^2y'^2} = [p^2 + (1+q)y^2]^{\frac{1}{2}}$$

on aura

$$\rho = \frac{[p^2 + (1+q)y^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{[p^2 + (1+q)(2px + qx^2)]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Si dans cette formule on fait $x = 0$, il vient $\rho = p$.

Ainsi, dans l'ellipse, la parabole et l'hyperbole, le rayon de courbure correspondant à l'extrémité du grand axe, ou à l'extrémité de l'axe réel, est équivalent à la quantité p qu'on nomme le paramètre.

Si la courbe proposée se réduit à la parabole $y^2 = 2px$, on a $q = 0$, et

$$\rho = p\left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2[me] *Exemple :* L'ellipse ou l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

On trouve

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad y'^2 = \pm \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{y^2} \mp 1\right), \quad y'' = \mp \frac{b^4}{a^2y^3},$$
$$y^3y'' = \mp \frac{b^4}{a^2}, \quad \rho = \frac{N^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2},$$

puis, en remettant pour N sa valeur,

$$\rho = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}x^2 \pm a^2 \mp x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Si l'on considère en particulier l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on trouve, pour le rayon de courbure à l'extrémité de l'axe a, $\rho = \frac{b^2}{a}$, et pour le rayon de courbure à l'extrémité de l'axe b, $\rho = \frac{a^2}{b}$.

3[me] *Exemple :* La cycloïde. Nous avons trouvé

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2R}{y} - 1},$$

d'où

$$y'^2 = \frac{2R}{y} - 1, \quad y'' = -\frac{R}{y^2}, \quad y^3 y'' = -Ry = -\tfrac{1}{2}N^2;$$

et par suite,

$$\rho = 2N.$$

Ainsi, dans la cycloïde, le rayon de courbure est double de la normale; par conséquent ce rayon de courbure s'évanouit avec la normale, et la courbure est infinie dans tous les points où la cycloïde rencontre la base, c'est-à-dire dans tous les points de rebroussement, tandis qu'à chacun des sommets le rayon de courbure devient égal au double du diamètre du cercle générateur.

130. Si l'on cesse de prendre l'abscisse x pour variable indépendante, on trouvera

$$\text{tang}\,\tau = \pm\frac{dy}{dx}, \quad \tau = \pm \text{arc tang}\frac{dy}{dx},$$

$$d\tau = \pm\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2}, \quad ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et l'équation $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d\tau}{ds}$ donnera

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}.$$

Dans le cas particulier où l'on prendra l'arc s pour variable indépendante, l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ donnera

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0,$$

et l'on en conclura

$$\frac{d^2y}{dx} = -\frac{d^2x}{dy} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2} = \pm \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}};$$

on aura donc dans ce cas

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}}{ds^2} = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

131. Lorsqu'on veut appliquer ces formules à la détermination du rayon de courbure d'une courbe, il faut commencer par exprimer les différentielles dx, d^2x, dy, d^2y, en fonction des coordonnées et de la différentielle de la variable indépendante. On se trouvera dispensé, dans chaque cas particulier, de faire un calcul de cette espèce, si l'on emploie la formule générale que nous allons établir.

Soit $u = f(x, y) = 0$, l'équation de la courbe donnée : on aura, en différentiant deux fois,

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0,$$

$$\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y = -\left(\frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2\right),$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{\frac{du}{dx}}=-\frac{dx}{\frac{du}{dy}}=\frac{dyd^2x-dxd^2y}{\frac{du}{dx}d^2x+\frac{du}{dy}d^2y}=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$dxd^2y-dyd^2x=\mp\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{du}{dx}d^2x+\frac{du}{dy}d^2y\right),$$

$$dxd^2y-dyd^2x=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+\frac{2d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2\right).$$

En substituant dans la valeur de ρ et remplaçant les différentielles dx, dy, par les quantités proportionnelles $\frac{du}{dy}$, $-\frac{du}{dx}$, on trouvera définitivement

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^2\frac{d^2u}{dx^2}-2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dxdy}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{dy^2}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si les variables x, y étaient séparées dans l'équation $u=0$, c'est-à-dire si la fonction u se composait de deux parties, dont l'une renfermât la seule variable x, et l'autre la seule variable y, on aurait

$$\frac{d^2u}{dxdy}=0,$$

et

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^2\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{dy^2}}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on applique cette formule aux courbes citées plus haut,

on retrouvera immédiatement les valeurs déjà obtenues pour ρ.

Nota. ρ est une quantité absolue, une longueur ; il faudra donc, dans les équations qui précèdent, réduire le double signe $\pm$ au signe $+$ ou au signe $-$, de manière à obtenir pour ρ une valeur toujours positive.

132. Si (*fig.* 20) à partir du point (x, y) on porte sur la courbe donnée et sur sa tangente, prolongée dans le sens de l'arc s, des longueurs égales et infiniment petites MM′, MM_1, représentées par i, on trouvera, pour les coordonnées de l'extrémité M_1 de la deuxième longueur,

$$x_1 = x + i\frac{dx}{ds}, \quad y_1 = y + i\frac{dy}{ds};$$

2° pour les coordonnées de l'extrémité M′ de la première,

$$x' = x + i\frac{dx}{ds} + \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \mathrm{I}\right),$$

$$y' = y + i\frac{dy}{ds} + \frac{i^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + \mathrm{J}\right),$$

I et J désignant des quantités infiniment petites ; car en supposant que les coordonnées x et y étant exprimées en fonction de l'arc s pris pour variable indépendante, on ait

$$x = \varphi(s), \quad y = \chi(s),$$

les coordonnées x', y' correspondantes à $s + i$ seront

$$x' = \varphi(s+i) = \varphi(s) + i\varphi'(s) + \frac{i^2}{1.2}[\varphi''(s) + \mathrm{I}]$$
$$= x + i\frac{dx}{ds} + \frac{i^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \mathrm{I}\right),$$

$$y' = \chi(s+i) = \chi(s) + i\chi'(s) + \frac{i^2}{1.2}[\chi''(s) + \mathrm{J}]$$
$$= y + i\frac{dy}{ds} + \frac{i^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + \mathrm{J}\right).$$

Cela posé, 1° la droite M_1M' qui joindra les extrémités de ces longueurs, sera sensiblement perpendiculaire à la tangente, ou sensiblement normale à la courbe. En effet, en appelant α_1, 6_1 les angles que cette droite fait avec les axes des x et des y; α, 6 les angles de la tangente avec ces mêmes axes, on a

$$\frac{\cos\alpha_1}{x'-x_1}=\frac{\cos 6_1}{y'-y_1},$$

ou, à très peu près,

$$\frac{\cos\alpha_1}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{\cos 6_1}{\frac{d^2y}{ds^2}};$$

on a d'ailleurs rigoureusement

$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos 6}{dy}.$$

De plus, en différentiant l'équation $dx^2+dy^2=ds^2$, et regardant l'arc s comme variable indépendante, on aura

$$dx\,d^2x+dy\,d^2y=0,$$

et en substituant pour dx, dy, d^2x, d^2y, les quantités proportionnelles

$$\cos\alpha,\quad \cos 6,\quad \cos\alpha_1,\quad \cos 6_1,$$

$$\cos\alpha\ \cos\alpha_1+\cos 6\ \cos 6_1=0:$$

or cette dernière équation exprime que la droite M_1M' est perpendiculaire à la tangente; donc, etc.

2°. Si nous appelons δ la longueur M_1M', nous aurons

$$\delta=\frac{i^2}{2}\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}+I\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}+J\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

et par suite

$$\frac{1}{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\lim.\frac{i^2}{2\delta}.$$

Mais en prenant, comme nous l'avons supposé, l'arc s pour variable indépendante, et désignant par ρ le rayon de courbure, on a

$$\rho = \frac{1}{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}};$$

on aura donc

$$\rho = \lim. \frac{i^2}{2\delta}.$$

En conséquence, pour obtenir le rayon de courbure d'une courbe en un point donné, il suffit de porter sur cette courbe et sur sa tangente prolongée dans le même sens, des longueurs égales et infiniment petites, et de diviser le carré de l'une d'elles par le double de la distance comprise entre leurs extrémités; la limite du quotient est la valeur exacte du rayon de courbure.

Corollaire. En appelant λ, μ les angles que fait avec les axes la normale à la courbe, au point x, y, et remarquant que ces angles sont, comme on vient de le prouver, sensiblement égaux à α_1, β_1, ou sont les limites des deux angles α_1, β_1, on trouvera rigoureusement, en prenant l'arc s pour variable indépendante,

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\cos\mu}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}} = \pm \rho,$$

et par suite $\quad \cos\lambda = \pm \rho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\mu = \pm \rho \frac{d^2y}{ds^2}.$

133. Le centre de courbure correspondant à un point (x, y), sera placé par rapport à ce point du côté des y positifs, ou du côté des y négatifs, suivant que la valeur du rapport $\frac{d\tau}{dx}$, τ étant l'angle de la tangente avec le demi-

axe des x positifs, déterminé par l'équation $\tang \tau = \frac{dy}{dx}$, sera elle-même positive ou négative. En effet, le centre de courbure étant le point d'intersection de deux normales infiniment voisines, il est clair que la courbe tournera toujours sa concavité vers ce même centre. Or la courbe tourne sa concavité du côté des y positifs lorsque la valeur de y'' est positive, du côté des x négatifs dans le cas contraire; donc aussi le centre de courbure sera situé par rapport au point M du côté des y positifs, ou du côté des y négatifs, suivant que la valeur de y'' sera positive ou négative.

D'ailleurs, l'équation $\frac{d\tau}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}$ nous montre que $\frac{d\tau}{dx}$ et y'' étant des quantités de même signe, on pourra évidemment consulter le signe de la première au lieu du signe de la seconde; donc, etc.

Il est bon d'observer, 1° que la valeur et le signe du rapport $\frac{d\tau}{dx}$ restent les mêmes quelle que soit la variable indépendante; 2° que ce que nous venons de dire s'applique non-seulement à l'angle τ, mais encore à l'un quelconque des angles déterminés par l'équation $\theta = \text{arc tang} y'$, qui ne diffèrent de τ que par des quantités constantes.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

Détermination analytique du centre de courbure.—Théorie des développées et des développantes.

154. Soit ρ le rayon de courbure d'une courbe plane correspondant au point (x, y), et ξ, η les coordonnées du centre de courbure : ce centre n'étant autre chose que l'extrémité du rayon ρ porté sur la normale à partir du point (x, y), et du côté vers lequel la courbe tourne sa concavité, ses coordonnées ξ, η vérifieront l'équation de la normale ; on aura donc

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0,$$

et de plus

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \rho^2;$$

on tire de ces équations

$$\frac{\xi - x}{dy} = -\frac{\eta - y}{dx} = \pm\frac{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm\frac{\rho}{ds}.$$

En ayant égard à l'équation $\frac{1}{\rho} = \pm\frac{d\tau}{ds}$, et se rappelant que le centre de courbure sera situé par rapport au point (x, y), du côté des y positifs ou négatifs, ou que la différence $y - \eta$ sera négative ou positive, suivant que $\frac{d\tau}{dx}$ sera une quantité positive ou négative, et que par conséquent $y - \eta$ et $\frac{d\tau}{dx}$ sont des quantités de signes contraires.

on trouvera

$$\frac{\xi - x}{dy} = -\frac{\eta - y}{dx} = -\frac{1}{d\tau},$$

$$\xi - x = -\frac{dy}{d\tau}, \quad \eta - y = \frac{dx}{d\tau}.$$

Ces deux équations serviront dans tous les cas à déterminer les coordonnées ξ, η du centre de courbure. Si l'on prend x pour variable indépendante, on aura

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}, \quad \frac{d\tau}{dy} = \frac{d\tau}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} \times \frac{y''}{1+y'^2},$$

$$\xi - x = -\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta - y = \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Si l'on cesse de prendre x pour variable indépendante, l'équation $\operatorname{tang} \tau = y'$ donnera

$$\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = d\,\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},$$

$$d\tau = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 \tau} \times \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2},$$

et par conséquent

$$\xi - x = -dy\frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \quad \eta - y = dx\,\frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Multipliant la première de ces équations par d^2x et la seconde par d^2y, et ajoutant, on trouverait

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y = dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

ou

$$(\xi - x)\,\frac{d^2x}{ds^2} + (\eta - y)\frac{d^2y}{ds^2} = 1.$$

Il serait facile d'établir directement cette équation, qu'on

peut mettre sous la forme

$$\frac{\xi - x}{\rho}\cdot\rho\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{\eta - y}{\rho}\cdot\rho\frac{d^2y}{ds^2} = 1:$$

en effet, $\frac{\xi - x}{\rho}$ et $\frac{\eta - y}{\rho}$, ainsi que $\rho\,\frac{d^2x}{ds^2}$, $\rho\,\frac{d^2y}{ds^2}$, expriment également, lorsqu'on prend l'arc s pour variable indépendante, les cosinus des angles λ, μ que la normale prolongée vers le centre de courbure fait avec les axes; de sorte que l'équation précédente se réduit à l'équation identique

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu = 1.$$

Dans le cas particulier où l'on prend l'arc s pour variable indépendante, les équations

$$\xi - x = \rho\cos\lambda = \rho^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad \eta - y = \rho\cos\mu = \rho^2\frac{d^2y}{ds^2},$$

donnent, en mettant pour ρ^2 sa valeur (n° 130),

$$\rho^2 = \frac{1}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2},$$

$$\xi - x = \frac{dx^2 + dy^2}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}\,d^2x,\quad \eta - y = \frac{dx^2 + dy^2}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}\,d^2y.$$

135. On peut enfin parvenir à des équations qui expriment immédiatement les coordonnées du centre de courbure au moyen des coordonnées x, y et des dérivées partielles de l'équation de la courbe, $u = 0$. En effet, les équations

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0,\quad \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = 0,$$

donnent

$$\frac{\xi - x}{\frac{du}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{du}{dy}} = \frac{(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y}{\frac{du}{dx}\,d^2x + \frac{du}{dy}\,d^2y};$$

mais nous avons trouvé

$$\frac{du}{dx}d^2x+\frac{du}{dy}d^2y=-\left(\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+2\,\frac{d^2u}{dxdy}dx\,dy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2\right);$$

$$(\xi-x)\,d^2x+(\eta-y)\,d^2y=dx^2+dy^2;$$

on aura donc aussi

$$\frac{\xi-x}{\frac{du}{dx}}=\frac{\eta-y}{\frac{du}{dy}}=-\frac{dx^2+dy^2}{\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2};$$

puis, en substituant aux différentielles dx, dy les quantités $\frac{du}{dy}$, $-\frac{du}{dx}$ qui leur sont respectivement proportionnelles, on trouvera

$$\frac{\xi-x}{\frac{du}{dx}}=\frac{\eta-y}{\frac{du}{dy}}=-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2\frac{d^2u}{dx^2}-2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dxdy}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{dy^2}}$$

$$=\pm\frac{\rho}{\left[+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}};$$

lorsque dans l'équation $u=0$ les variables x, y sont séparées, on a $\frac{d^2u}{dxdy}=0$, et la formule précédente se réduit à

$$\frac{\xi-x}{\frac{du}{dx}}=\frac{\eta-y}{\frac{du}{dy}}=-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{dy^2}}$$

$$=\pm\frac{\rho}{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Au moyen de l'une ou de l'autre de ces deux formules,

on déterminera immédiatement les coordonnées ξ, η du centre de courbure correspondant au point (x, y) et le rayon de courbure ρ.

136. Nous avons trouvé que les coordonnées et le rayon de courbure vérifiaient toujours les trois équations

$$(a)\left\{\begin{array}{l}(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=\rho^2,\quad(\xi-x)dx+(\eta-y)dy=0,\\(\xi-x)d^2x+(\eta-y)d^2y-dx^2-dy^2=0,\end{array}\right.$$

qui suffisent pour déterminer ces trois inconnues en fonction de x, y. Il est essentiel de remarquer que l'on retrouve la deuxième et la troisième équation lorsqu'on différentie la première et la deuxième, comme si les deux inconnues ξ, η, étaient des quantités constantes.

Lorsque le point (x, y) vient à se déplacer sur la courbe donnée, le centre de courbure se déplace en même temps. Si le premier point se meut d'une manière continue sur la courbe dont il s'agit, le deuxième décrira une nouvelle courbe. Or pour obtenir l'équation de cette dernière, il suffira évidemment d'éliminer x, y entre l'équation $u=0$ et deux des équations qui déterminent ξ, η, par exemple,

$$(\xi-x)dx+(\eta-y)dy=0,\quad(\xi-x)d^2x+(\eta-y)d^2y-dx^2-dy^2=0,$$

ou (n° 135)

$$\frac{\xi-x}{\frac{du}{dx}}=\frac{\eta-y}{\frac{du}{dy}}=\ldots\ldots\ldots$$

L'équation résultant de l'élimination ne renfermera plus que les deux variables ξ, η et représentera précisément la ligne qui sera le lieu géométrique de tous les centres de courbure de la courbe donnée. En supposant que x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, etc., tiennent la place de leurs valeurs en ξ, η dans les équations (a), ces équations appartiennent évidemment à la ligne lieu de tous les centres

de courbure; les différentielles de ces équations lui appartiendront donc également. Or, si l'on différentie les deux premières, et si l'on supprime les termes qui s'évanouissent en vertu de la seconde et de la troisième, on trouvera

$$(\xi - x)d\xi + (\eta - y)d\eta = \rho d\rho, \quad d\xi dx + d\eta dy = 0;$$

cette dernière équation exprime que les tangentes menées à la courbe donnée par le point (x, y), et à la nouvelle courbe par le point (ξ, η), sont perpendiculaires entre elles, ou que la normale à la courbe donnée est parallèle à la tangente à la seconde courbe. Par conséquent, le rayon de courbure qui coïncide avec la normale, et vient aboutir au point (ξ, η), sera en ce dernier point tangent à la seconde courbe.

De plus, si l'on nomme σ l'arc de cette nouvelle courbe compris entre un point fixe et le point mobile ξ, η, on aura

$$d\xi^2 + d\eta^2 = d\sigma^2,$$

et l'on tirera des équations

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0, \quad d\xi dx + d\eta dy = 0,$$
$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta = \rho d\rho,$$

$$\frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{d\eta}{\eta - y} = \frac{(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta}{\rho^2} = \pm\frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{\rho}$$
$$= \frac{d\rho}{\rho} = \pm\frac{d\sigma}{\rho}.$$

On trouvera par suite

$$d\rho = \pm\, d\sigma, \quad d(\rho \mp \sigma) = 0,$$

ou en faisant, pour plus de commodité, $\rho \mp \sigma = \varphi(x)$,

$$\varphi'(x)\,dx = 0, \quad \varphi'(x) = 0,$$

La dérivée de la fonction $\varphi(x)$ étant toujours nulle,

cette fonction sera constante et son accroissement toujours égal à zéro, puisque l'on a

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(x + \theta\Delta x)\Delta x = 0;$$

on a donc enfin $\Delta\rho \mp \Delta\sigma = 0$, $\Delta\rho = \pm\Delta\sigma$.

Cette équation prouve que l'arc $\Delta\sigma$ renfermé entre deux points de la nouvelle courbe est égal, au signe près, à la différence des rayons de courbure qui aboutissent à ces deux points. Ajoutons que le signe du deuxième membre de l'équation $\Delta\rho = \pm\Delta\sigma$ sera le signe du deuxième membre des équations

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \pm\frac{\xi - x}{\rho}, \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \pm\frac{\eta - y}{\rho}.$$

Les premiers membres $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d\eta}{d\sigma}$ sont les cosinus des angles que fait avec les axes la tangente à la nouvelle courbe prolongée dans le sens de l'arc σ; les seconds membres $\frac{\xi - x}{\rho}$, $\frac{\eta - y}{\rho}$ sont les cosinus des angles que fait avec les mêmes axes le rayon de courbure mené du point (x, y) au point ξ, η; on en conclura facilement que l'arc σ et le rayon ρ croîtront simultanément ou que l'on aura $\Delta\rho = \Delta\sigma$, si la tangente à la nouvelle courbe prolongée dans le sens de l'arc σ, coïncide non pas avec le rayon ρ, mais avec le prolongement de ce rayon au-delà du point ξ, η, tandis que dans l'hypothèse contraire le rayon ρ venant à croître, l'arc σ diminuera, et l'on aura $\Delta\rho = -\Delta\sigma$.

137. Cela posé, concevons (*fig.* 21) qu'un fil inextensible, fixé par une de ses extrémités μ, et d'une longueur égale à celle du rayon de courbure ρ, soit d'abord appliqué sur ce rayon; puis que ce même fil restant toujours tendu vienne à se mouvoir de telle sorte qu'une partie s'enroule sur l'arc $\pm\Delta\sigma$ compris entre le point μ ou (ξ, η) et le

point μ' ou $(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$. L'autre partie qui restera droite et touchera la nouvelle courbe CC′ au point μ', aura évidemment la longueur du rayon de courbure à ce point, puisque dans le cas dont il s'agit

$$\Delta\sigma = -\Delta\rho, \quad M'\mu' = M'\mu - \mu\mu' = \rho - \Delta\sigma = \rho + \Delta\rho = \rho',$$

et par conséquent celle des extrémités du fil qui coïncidait d'abord avec le point M ou (x, y) coïncidera actuellement avec le point M′ ou $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ situé sur la courbe AA′; comme notre raisonnement subsiste, quelle que soit la longueur de l'arc $\Delta\sigma$, nous devons en conclure que le fil inextensible, en même temps qu'il s'enroule sur la nouvelle courbe, décrit, par son extrémité mobile, la courbe donnée.

La même courbe se trouvera encore décrite, mais en sens contraire, si, après s'être enroulé sur l'arc $\pm\Delta\sigma$, le fil se meut de manière à revenir à sa position primitive. Dans ce mouvement, la portion du fil qui s'était appliquée sur l'arc $\pm\Delta\sigma$ se développera de nouveau en ligne droite. On appelle *développée* d'une courbe donnée AA′, la courbe CC′ dont les arcs se développent en ligne droite sur le rayon de courbure de la première, et qui, comme nous venons de l'expliquer, peut servir au tracé de la courbe donnée AA′. Au contraire, la première courbe décrite par l'extrémité mobile du fil enroulé sur la seconde est la *développante* de celle-ci.

138. 1re *Application*. Supposons qu'il s'agisse de trouver le lieu des centres de courbure de la cycloïde, représentée par le système des équations

$$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega),$$

nous prendrons, pour éliminer x, y, les deux équations

$$\xi - x = -\frac{dy}{d\tau}, \quad \eta - y = \frac{dx}{d\tau};$$

dans le cas dont il s'agit

$$\tan g\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{R\sin\omega}{R(1-\cos\omega)} = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}}{2\sin^2\frac{\omega}{2}} = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} = \cot\frac{\omega}{2},$$

ce qui exige que τ soit de la forme $\pm n\pi + \frac{\pi-\omega}{2}$, on aura donc

$$\tau = \pm n\pi + \frac{\pi-\omega}{2}, \quad d\tau = -\frac{1}{2}d\omega,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -2R\sin\omega, \quad \frac{dx}{d\tau} = -2R(1-\cos\omega),$$

et par suite

$$\xi = x + 2R\sin\omega = R(\omega + \sin\omega),$$

$$\eta = y - 2R(1-\cos\omega) = -R(1-\cos\omega);$$

si nous posons $\omega = \omega' + \pi$, il viendra

$$\xi - \pi R = R(\omega' - \sin\omega'), \quad \eta + 2R = R(1-\cos\omega').$$

Telles sont les deux équations dont l'ensemble représentera la développée, ou qui, par l'élimination de x, conduiront à l'équation de la développée. Cette courbe passe évidemment par le point qui, répondant à $\omega = 0$, $\omega' = \pi$, a pour coordonnées $\xi = \pi R$, $\eta = -2R$, et n'est autre chose que le centre de courbure correspondant à l'ordonnée maximum de la première branche de la cycloïde. Transportons l'origine en ce point, en changeant ξ en $\xi + \pi R$, η en $\eta - 2R$: les équations de la développée sont alors

$$\xi = R(\omega' - \sin\omega'), \quad \eta = R(1-\cos\omega');$$

et comme elles sont toutes pareilles aux équations de la

cycloïde donnée, nous en conclurons qu'une cycloïde a pour développée une autre cycloïde de même forme et de mêmes dimensions dont les points de rebroussement coïncident avec les centres de courbure correspondant aux points milieux des diverses branches de la première. Ajoutons que les points de rebroussement de la première sont en même temps les points milieux des diverses branches de la deuxième, et que la base de la deuxième cycloïde se confond avec la droite qui a pour équation $y = -2R$. Il serait facile d'établir les équations

$$\xi = x + 2R \sin\omega, \quad \eta = -y,$$

en partant du principe démontré que le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale, quand la base est prise pour axe des x. En effet, en vertu de ce principe, le milieu du rayon de courbure $M\mu$ (*fig.* 22), c'est-à-dire le point qui a pour coordonnées $\frac{x+\xi}{2}, \frac{y+\eta}{2}$, coïncide avec le point dans lequel la base est touchée par le cercle générateur dont l'ordonnée est nulle et dont l'abscisse est $R\omega = x + R \sin\omega$. On a donc

$$\frac{x+\xi}{2} = x + R \sin\omega, \quad \frac{y+\eta}{2} = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement les équations cherchées.

On peut même, sans recourir à ces formules, et à l'aide du seul principe que nous venons de rappeler, déterminer la nature de la courbe qui sert de développée à la cycloïde. Pour y parvenir, décrivons (*fig.* 22) avec le rayon R deux cercles égaux qui aient leurs centres placés sur l'axe des y, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe des x, et qui touchent ce dernier axe à l'origine des coordonnées. Concevons ensuite que l'on fasse rouler ces deux cercles, le premier sur l'axe des x, le deuxième sur la droite pa-

rallèle $y = -2R$, de manière qu'ils ne cessent pas d'avoir l'axe des x pour tangente commune. Les rayons qui dans le premier instant aboutissaient à l'origine des coordonnées, tourneront autour des centres des deux cercles et décriront en même temps des angles égaux, d'où il résulte, 1° que ces rayons CM et $\gamma\mu$ seront toujours parallèles; 2° que la droite $M\mu$ qui joindra leurs extrémités, passera par le point de contact et sera divisée en ce point en deux parties égales. Or la partie MN comprise dans le premier cercle sera évidemment la normale de la cycloïde proposée que décrira le premier rayon; donc le rayon de courbure de cette courbe égal au double de la normale, coïncidera nécessairement avec la droite entière $M\mu$, et le centre de courbure avec l'extrémité du second rayon $\gamma\mu$; donc le lieu des centres de courbure ou la développée de la même courbe sera précisément la seconde cycloïde décrite par cette extrémité.

Corollaire. L'arc $A\mu$ de la cycloïde est égal au rayon de courbure $M\mu$, et par conséquent la demi-cycloïde entière $AA' = A'D = 4R$. En général, $A\mu = \sigma = 2\sqrt{2Ry}$; la cycloïde est une courbe rectifiable.

2me *Application.* Considérons l'ellipse représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ou

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{a^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{y}{b^2}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{a^2},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{1}{a^2b^2};$$

la formule

$$\frac{\xi - x}{\frac{du}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{du}{dy}} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{d^2u}{dy^2}}$$

donnera

$$a^2\left(\frac{\xi}{x} - 1\right) = b^2\left(\frac{\eta}{y} - 1\right) = -\left(b^2\frac{x^2}{a^2} + a^2\frac{y^2}{b^2}\right)$$
$$= -a^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = -b^2 + \frac{b^2 - a^2}{b^2}y^2,$$

d'où l'on tire

$$a^2\frac{\xi}{x} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2, \quad b^2\frac{\eta}{y} = \frac{b^2 - a^2}{b^2}y^2.$$

Si, en supposant que a soit le grand axe de l'ellipse, on pose

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad B = \frac{a^2 - b^2}{b},$$

on trouvera

$$\frac{x}{a} = +\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y}{b} = -\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En substituant ces valeurs de $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

il vient

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Telle est donc l'équation de la développée de l'ellipse. On peut la transformer de manière à ce qu'elle ne renferme que des puissances entières des variables. En effet, après

avoir élevé chacun des deux membres à la troisième puissance, on en tirera

$$1-\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{\eta^2}{B^2}=3\left(\frac{\xi\eta}{AB}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=3\left(\frac{\xi\eta}{AB}\right)^{\frac{2}{3}},$$

et par suite

$$\left(1-\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{\eta^2}{B^2}\right)^3=27\,\frac{\xi^2}{A^2}\cdot\frac{\eta^2}{B^2}.$$

On conclura aisément de ces équations, que la développée de l'ellipse (*fig.* 23) est une courbe fermée, divisible en quatre parties superposables par deux axes qui coïncident, comme ceux de l'ellipse, avec les axes coordonnés et qui rencontrent cette développée en quatre points dont les distances, à l'origine, sont A et B. Ajoutons que chacune de ces parties de la développée touche les axes en les rencontrant, et qu'en conséquence chacun des points de rencontre α, α', 6, $6'$, est pour cette courbe un point de rebroussement. Les rayons de courbure, aux sommets, sont représentés respectivement par $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$.

3me *Application :* à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

On reconnaîtra que l'équation de la développée se réduit, en posant $A=\frac{a^2+b^2}{a}$, $B=\frac{a^2+b^2}{b}$, à

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1 \quad \text{ou} \quad \left[1-\left(\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{\eta^2}{B^2}\right)\right]^3=-27\,\frac{\xi^2}{A^2}\cdot\frac{\eta^2}{B^2},$$

et l'on conclut de ces équations que la développée de l'hyperbole (*fig.* 24) est une courbe qui s'étend à l'infini, qui se trouve divisée par les axes des coordonnées en quatre parties égales, et qui se compose de deux branches séparées, dont chacune a un point de rebroussement situé sur le prolongement de l'axe réel de l'hyperbole, à la distance A de

l'origine. Le rayon de courbure au sommet de l'axe réel est égal à $\frac{b^2}{a}$.

4me *Application :* à la parabole $y^2 = 2px$,

$$u = \tfrac{1}{2}(2px - y^2) = 0,$$

d'où

$$\frac{du}{x} = p, \quad \frac{du}{dy} = -y, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = -1, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0;$$

donc

$$\frac{\xi - x}{p} = 1 - \frac{\eta}{y} = 1 + \frac{y^2}{p^2} = \frac{p + 2x}{p}, \quad \xi = p + 3x,$$

$$\eta = -\frac{y^3}{p^2}, \quad x = \frac{\xi - p}{3}, \quad y = -p^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $y^2 = 2px$, on trouvera

$$\tfrac{2}{3}(\xi - p) = p^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}, \quad \tfrac{8}{27}(\xi - p)^3 = p\eta^2.$$

On reconnaîtra facilement que cette développée (*fig.* 25) s'étend à l'infini du côté des x positives, qu'elle a pour axe l'axe de la parabole et qu'elle rencontre cet axe en le touchant au point dont l'abscisse est p. Ce point est un point de rebroussement; si l'on y transporte l'origine des coordonnées en changeant ξ en $\xi + p$, l'équation de la développée deviendra

$$\xi = \frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}, \quad \eta = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{1}{2}}\xi^{\frac{3}{2}},$$

et il en résulte que toute parabole du second degré a pour développée une autre parabole du degré $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{2}$.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

Du contact des courbes. — De l'ordre de ce contact.

139. On dit que deux courbes se touchent lorsqu'elles ont un point de commun et une tangente commune. De plus, lorsque deux courbes A″B″, A′B′ touchent la courbe AB au même point M, la courbe A′B′, qui passe entre les deux autres, est regardée comme ayant avec la courbe AB un contact plus intime que la courbe A″B″. Les géomètres distinguent ainsi des contacts de divers ordres, que l'on parvient facilement à définir au moyen de la considération des coefficients différentiels ou fonctions dérivées.

Soient $y = F(x)$, $y = f(x)$, les équations de deux courbes rapportées à des coordonnées rectangulaires. Supposons que x soit l'abscisse d'un point commun à ces deux courbes; les ordonnées correspondantes à une abscisse voisine $x + h$ seront respectivement

$$F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} [F^{(n+1)}(x) + I],$$

$$f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} [f^{(n+1)}(x) + I'].$$

Si elles ont une tangente commune au point x, y, on aura en ce point, non-seulement $F(x) = f(x)$, mais encore $F'(x) = f'(x)$; et il sera certain qu'aucune autre ligne $y = \varphi(x)$ ne pourra passer entre les courbes proposées, à moins que l'on n'ait également $\varphi'(x) = F'(x) = f'(x)$. En effet, la différence entre les ordonnées des deux courbes proposées correspondantes à $x + h$ peut être exprimée par

$$[F''(x + \theta h) - f''(x + \theta_1 h)] \frac{h^2}{1.2},$$

tandis que si la condition dont il s'agit n'avait pas lieu, la différence entre l'ordonnée de la troisième courbe et celle de la première serait exprimée par

$$[F'(x + \theta h) - \varphi'(x + \theta' h)] h.$$

Or il est visible que quand h est très petit, la seconde différence est plus grande que la précédente; donc la courbe $y = \varphi(x)$ ne passe pas entre les deux premières.

On dit de deux lignes qui ont un point commun et pour lesquelles le coefficient différentiel du premier ordre a la même valeur en ce point, qu'elles ont entre elles un contact du premier ordre.

140. Admettons maintenant que pour les deux courbes proposées les coefficients différentiels des deux premiers ordres aient des valeurs communes, la différence des ordonnées de ces courbes qui répondait à l'abscisse $x + h$, sera exprimée par

$$\frac{h^3}{1.2.3} [F'''(x + \theta h) - f'''(x + \theta' h)],$$

tandis que pour une troisième courbe $y = \varphi(x)$, qui ne satisferait pas à la même condition, mais qui toucherait cependant la première, la différence des coordonnées se-

rait exprimée par

$$\frac{h^2}{1.2}[F''(x+\theta h)-f''(x+\theta''h)].$$

Or lorsque h est très petit, cette seconde différence est plus grande que la première; la troisième courbe ne pourra donc jamais passer entre les deux premières, que l'on dit avoir entre elles un contact du second ordre. On dit aussi, dans ce cas, que les deux courbes sont osculatrices, parce qu'en sus de la tangente commune elles ont évidemment le même cercle osculateur. En effet, la direction de la tangente, le centre et le rayon du cercle osculateur ne dépendent, comme nous l'avons vu, que des deux premières dérivées y', y'', qui ici, par hypothèse, sont égales; donc, etc.

Réciproquement, si deux courbes ont en un point commun même tangente et même cercle osculateur, leur contact sera du second ordre, parce que les deux premières dérivées auront nécessairement la même valeur.

141. Considérons (*fig.* 26) deux courbes qui se touchent en un point donné M; si du point de contact comme centre et avec un rayon infiniment petit, on décrit un cercle, ce cercle coupera les deux courbes en deux points très voisins l'un de l'autre P et Q, et le rapprochement plus ou moins considérable des deux courbes à la distance i du point de contact, aura évidemment pour mesure la longueur infiniment petite PQ, comprise entre les deux points dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, la corde PQ de l'arc de grand cercle renfermé entre les deux courbes; si nous appelons ω l'angle très petit compris entre les rayons menés à ses extrémités, cet arc et sa corde seront respectivement mesurés par les produits $i\omega$, $2i\sin\frac{\omega}{2}$. Si les deux courbes changent de forme, de telle manière que, se touchant toujours au point donné, elles se rapprochent

davantage l'une de l'autre dans le voisinage de ce point, les valeurs de l'expression $2i \sin \frac{\omega}{2}$ diminueront nécessairement, ce qui suppose que la fonction de i, représentée par ω, diminuera elle-même. Si au contraire le rapprochement des deux courbes devient moindre, les valeurs de ω croîtront nécessairement, de sorte que le rapprochement des deux courbes sera plus ou moins considérable suivant que les valeurs de ω, correspondantes à de très petites valeurs de i, seront plus ou moins petites. Dès-lors on pourra énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1er. Si deux courbes se touchent en un point donné, et que l'on marque sur ces deux courbes deux points situés à la distance infiniment petite i du point de contact, le rapprochement entre les deux courbes, dans le voisinage de ce point, sera d'autant plus considérable que l'ordre de la quantité infiniment petite ω sera plus élevé : en effet, cette quantité ω sera d'autant plus petite que son ordre sera plus élevé.

Cela posé, il est naturel de prendre l'ordre de la quantité infiniment petite ω considérée comme fonction de la base i, pour indiquer ce qu'on peut appeler l'ordre de contact des deux courbes. Soit a cet ordre; puisque le rapport $\frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$ a l'unité pour limite, le produit

$$\frac{\omega \sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} = 2 \sin \frac{\omega}{2}$$

sera encore une quantité infiniment petite de l'ordre a, tandis que les expressions $i\omega$, $2i \sin \frac{\omega}{2}$ seront des quantités infiniment petites de l'ordre $a + 1$, donc :

THÉORÈME 2me. Lorsque deux courbes se touchent en un point donné, l'ordre du contact est inférieur d'une unité à l'ordre de la quantité infiniment petite qui re-

présente la distance entre deux points situés sur les deux courbes, également éloignés du point de contact, et dont la distance à ce point est un infiniment petit du premier ordre. Il est bon d'observer que la droite qui unit ces deux points étant la base d'un triangle isoscèle MPQ, et opposée dans ce triangle au très petit angle ω, sera sensiblement perpendiculaire aux deux côtés de ce triangle, et par suite à la tangente commune aux deux courbes, tangente dont les deux côtés diffèrent très peu. La surface du triangle est d'ailleurs égale au produit $\frac{1}{2} i^2 \sin \omega$ et par conséquent à une quantité infiniment petite dont l'ordre $a+2$ surpasse de deux unités l'ordre du contact des courbes.

142. Concevons maintenant qu'après avoir décrit du point M, avec le rayon infiniment petit $MP=MQ=i$, un arc de cercle, on mène par le point P une droite PS qui fasse avec la tangente commune un angle γ. Dans le triangle PQS, le côté QS, sensiblement parallèle à la tangente commune, parce qu'il coïncide avec une corde dont les extrémités situées sur l'une des courbes sont très voisines du point de contact, formera évidemment avec les deux autres côtés PQ, PS deux angles finis dont le premier différera très peu d'un angle droit, et le second de l'angle γ; on aura donc, en désignant par ε et ε' deux quantités infiniment petites,

$$PS = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)}{\sin(\gamma \pm \varepsilon')} PQ = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)}{\sin(\gamma \pm \varepsilon')} 2 i \sin\frac{\omega}{2}.$$

De plus, si l'on abaisse du point M sur PS la perpendiculaire MR, l'angle MPS étant sensiblement égal à γ, on aura

$$MR = MP \sin(\gamma \pm \varepsilon'') = i \sin(\gamma \pm \varepsilon'');$$

or les valeurs de PS et de MR prouvent, 1° que si ω et $\sin\omega$ sont des infiniment petits de l'ordre a, c'est-à-dire que si

les courbes données ont entre elles un contact de l'ordre a, la distance PS sera un infiniment petit de l'ordre $a+1$; 2° que cet ordre ne variera pas si, au lieu de prendre pour base l'infiniment petit du premier ordre $MP = i$, on prenait pour base la perpendiculaire MR, puisque cette perpendiculaire est elle-même un infiniment petit du premier ordre dans le système dont la base est MP ou i. On conclut immédiatement de cette remarque le théorème qui suit :

Théorème 3me. L'ordre de contact de deux courbes planes qui se touchent en un point M, est inférieur d'une unité à l'ordre de la distance infiniment petite comprise entre les deux points P et S, où les deux courbes sont rencontrées par une sécante qui forme un angle fini avec la tangente commune, dans tout système où la distance du point de contact à la sécante dont il s'agit est un infiniment petit du premier ordre.

143. Si les deux courbes sont représentées par deux équations entre des coordonnées rectangulaires ou obliques, et si la tangente commune n'est pas parallèle à l'axe des y, alors, en supposant la sécante parallèle à ce même axe, on déduira du théorème 3me la proposition suivante :

Théorème 4me. Pour obtenir l'ordre de contact de deux courbes planes qui se touchent en un point où la tangente commune n'est pas parallèle à l'axe des y, il suffit de mener une ordonnée très voisine du point de contact et de chercher le nombre qui représente l'ordre de la portion infiniment petite de cette ordonnée comprise entre les deux courbes dans le cas où l'on considère la distance du point de contact à l'ordonnée comme infiniment petite du premier ordre; ce nombre diminué d'une unité indique l'ordre de contact cherché.

Corollaire 1er. Soient $y = f(x)$, $y = F(x)$, les équations des deux courbes planes, elles auront un

point commun correspondant à une valeur donnée de x, et en ce point une tangente commune non parallèle à l'axe des y, si pour la valeur donnée de x les équations des deux courbes fournissent des valeurs égales et finies, non-seulement de l'ordonnée y, mais encore de sa dérivée y'. Dans cette hypothèse, la différence $F(x) - f(x)$ qui s'évanouira pour la valeur de x relative au point commun, deviendra infiniment petite quand x recevra un accroissement infiniment petit; et si l'on considère cet accroissement comme étant du premier ordre, l'ordre de la quantité infiniment petite qui représentera la nouvelle valeur de $F(x) - f(x)$ surpassera d'une unité l'ordre de contact des deux courbes.

Dès-lors, si les deux courbes se touchent en un point de l'axe des y, mais sans avoir cet axe pour tangente commune, il suffira, pour déterminer l'ordre du contact, de chercher le nombre qui indiquera l'ordre de la différence $F(x) - f(x)$, en considérant l'abscisse x comme une quantité infiniment petite du premier ordre. On reconnaîtra, par exemple, que les paraboles $y = x^2$, $y = x^3$ ont, à l'origine, un contact du premier ordre, les paraboles $y = x^{n+1}$, $y = x^{n+2}$ un contact de l'ordre n, les deux courbes $y = x^{\frac{4}{3}}$, $y = x^{\frac{5}{4}}$ un contact de l'ordre $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

Corollaire 2me. Si deux courbes ont un point commun correspondant à l'abscisse x, et en ce point une tangente commune non parallèle à l'axe des y, avec un contact de l'ordre a, la différence $F(x) - f(x)$ sera nulle; et si l'on désigne par i un accroissement infiniment petit du premier ordre attribué à l'abscisse x, l'expression

$$F(x+i) - f(x+i)$$

sera (corollaire 1er) un infiniment petit de l'ordre $a + 1$,

et par conséquent, en désignant par n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a,

$$F^{(n+1)}(x+i)-f^{(n+1)}(x+i)$$

sera (nº 26) la première des expressions $F(x+i)-f(x+i)$, $F'(x+i)-f'(x+i)$, ... etc., qui cessera de s'évanouir avec i, ou, ce qui revient au même, $F^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(x)$ sera la première des différences

$$F(x)-f(x), \quad F'(x)-f'(x), \text{ etc.} \ldots$$

qui obtiendra une valeur différente de o. Par conséquent les dérivées successives y', y''... jusqu'à celle dont l'ordre coïncide avec le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à l'ordre du contact, conserveront les mêmes valeurs dans le passage d'une des courbes à l'autre. Donc aussi lorsque l'ordre de contact sera un nombre entier, il suffira, pour le déterminer, de chercher quelle est la dernière des équations

$$f(x)=F(x), \quad f'(x)=F'(x), \quad f''(x)=F''(x), \ldots$$

qui se trouve vérifiée par l'abscisse du point de contact; l'ordre des dérivées comprises dans cette dernière équation sera précisément le nombre demandé.

Si la tangente commune était parallèle à l'axe des y, il faudrait, dans les théorèmes et corollaires qui précèdent, changer x en y, et réciproquement.

144. Dans l'application du troisième théorème, on pourra prendre pour sécante la ligne qui joindrait les extrémités de deux longueurs égales et infiniment petites portées sur les deux courbes à partir du point de contact, puisque l'angle formé par cette ligne avec la tangente commune, a pour limite l'angle droit; on arrivera ainsi à un nouveau théorème :

Théorème 5me. Pour obtenir l'ordre de contact de deux

courbes qui se touchent en un point donné, il suffit de chercher le nombre qui représente l'ordre de la distance infiniment petite comprise entre les extrémités de deux longueurs égales portées sur les deux courbes à partir du point de contact, dans le cas où ces mêmes longueurs deviennent infiniment petites du premier ordre; le nombre dont il s'agit, diminué d'une unité, indique toujours l'ordre du contact.

Corollaire. En désignant par x, y, et ξ, η les coordonnées des extrémités des deux longueurs égales entre elles et à i, par δ la distance de ces extrémités, par a le contact des courbes, on aura

$$\delta = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

et puisque δ doit être infiniment petit de l'ordre $a+1$, il faudra que les deux différences $x-\xi$, $y-\eta$ soient elles-mêmes de l'ordre $a+1$, ou que du moins l'une soit de cet ordre, l'autre étant d'un ordre plus élevé, ce qui exige, en appelant n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a, que des expressions

$$x-\xi,\ \frac{d(x-\xi)}{di},\ \frac{d^2(x-\xi)}{di^2},\ldots\ \frac{d^n(x-\xi)}{di^n},\ \frac{d^{n+1}(x-\xi)}{di^{n+1}},$$

$$y-\eta,\ \frac{d(y-\eta)}{di},\ \frac{d^2(y-\eta)}{di^2},\ldots\ \frac{d^n(y-\eta)}{di^n},\ \frac{d^{n+1}(y-\eta)}{di^{n+1}},$$

les deux dernières, ou au moins l'une d'entre elles, soient les seules qui cessent de s'évanouir pour $i=0$. Soient d'ailleurs s et σ les arcs des deux courbes renfermés entre deux points fixes et les points mobiles (x, y), (ξ, η), on aura $di = ds = d\sigma$, puisque les trois variables i, s et σ diffèrent entre elles de quantités constantes, et l'on pourra dès-lors, aux expressions qui précèdent, substituer (n° 91)

les suivantes

$$x-\xi,\quad \frac{dx}{ds}-\frac{d\xi}{d\sigma},\quad \frac{d^2x}{ds^2}-\frac{d^2\xi}{d\sigma^2},\ldots\ldots$$
$$\frac{d^nx}{ds^n}-\frac{d^n\xi}{d\sigma^n},\quad \frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\xi}{d\sigma^{n+1}},$$
$$y-\eta,\quad \frac{dy}{ds}-\frac{d\eta}{d\sigma},\quad \frac{d^2y}{ds^2}-\frac{d^2\eta}{d\sigma^2},\ldots\ldots$$
$$\frac{d^ny}{ds^n}-\frac{d^n\eta}{d\sigma^n},\quad \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}-\frac{d^{n+1}\eta}{d\sigma^{n+1}},$$

qui devront être toutes nulles, à l'exception de l'une au moins des deux dernières; et l'on pourra énoncer le théorème suivant:

145. Théorème 6me. Étant données deux courbes qui se touchent en un point (x, y), si l'on considère les coordonnées x, y de chacune d'elles comme des fonctions de l'arc s pris pour variable indépendante, et prolongé dans le même sens pour les deux courbes au-delà du point de contact, les dérivées successives

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^3x}{ds^3},\ldots\quad \frac{dy}{ds},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^3y}{ds^3},\ldots$$

jusqu'à celles dont l'ordre sera indiqué par le nombre entier n égal ou immédiatement supérieur à l'ordre du contact, ne changeront pas de valeur dans le passage de la première courbe à la seconde, tandis que des deux dérivées $\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}$, l'une au moins prendra une valeur nouvelle.

146. Du théorème qui précède, joint aux principes établis dans la dix-neuvième leçon, on conclura immédiatement que si deux courbes ayant entre elles un contact de l'ordre a, on désigne par n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a, 1° les n premières différentielles des variables x, y, prises relativement à une

fonction quelconque r de ces variables, et même les n premières différentielles d'une fonction quelconque t de ces variables, prises par rapport à une autre fonction arbitraire u de ces variables, ne changeront pas de valeurs quand on passera de la première courbe à la seconde; 2° les différentielles de l'ordre $n+1$ de x, y, prises par rapport à r, ou de t prises par rapport à u, changeront ordinairement de valeur quand on passera de la première courbe à la seconde, quoique le contraire puisse avoir lieu dans certains cas particuliers.

Réciproquement, si les dérivées successives

$$\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots \frac{d^nx}{ds^n}, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2y}{ds^2}, \ldots \frac{d^ny}{ds^n}$$

ne changent pas de valeurs quand on passe de la première courbe à la seconde, ces deux courbes auront entre elles un contact d'un ordre au moins égal à n.

Dans cette hypothèse, en effet, les différences $x-\xi$, $y-\eta$, considérées comme fonctions de i, s'évanouiront avec i ainsi que leurs dérivées jusqu'à celles de l'ordre n inclusivement, et l'on aura, en faisant $x-\xi=\varphi(i)$, $y-\eta=\chi(i)$,

$$x-\xi=\phi(i)=\frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\phi^{n+1}(\theta i),$$

$$y-\eta=\chi(i)=\frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\chi^{(n+1)}(\theta i).$$

Cela posé, les rapports $\frac{x-\xi}{i^{\alpha}}$, $\frac{y-\eta}{i^{\alpha}}$ s'évanouissant avec i tant que α sera plus petit que $n+1$, les deux différences $x-\xi$, $y-\eta$, ainsi que la distance

$$\delta=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

seront des quantités infiniment petites d'un ordre au moins égal à $n+1$, et par conséquent les deux courbes auront entre elles un contact d'un ordre au moins égal à n.

147. Si deux courbes sont telles que la forme et la position de la première étant complétement déterminées, la forme et la position de la deuxième puissent varier avec les valeurs de plusieurs constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots a_n$ comprises dans son équation, on pourra disposer de ces constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou de quelques-unes d'entre elles, de manière que les valeurs de plusieurs termes consécutifs de la suite $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ restent les mêmes pour l'abscisse x dans le passage de la première courbe à la seconde. Alors la seconde courbe aura, au point (x, y), avec la première, un contact plus ou moins intime, inférieur d'une unité au nombre des termes qui n'auront pas changé de valeur, ou représenté par l'indice des deux dernières dérivées égales. Si n est le nombre des constantes de la deuxième équation, on pourra disposer de ces n constantes de manière à ce que l'ordonnée y et les $(n-1)$ premières dérivées conservent la même valeur pour les deux courbes; de sorte que parmi les valeurs qu'on peut attribuer aux n constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots a_n$, renfermées dans l'équation $f(x_1, y_1, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$, il existe généralement un système pour lequel la courbe représentée par cette équation acquiert avec une courbe donnée $F(x, y, z) = 0$, au point dont l'abscisse est x, un contact d'un ordre au moins égal au nombre $n-1$. Il est évident d'ailleurs qu'il existe une infinité de systèmes de valeurs des constantes pour lesquels le contact entre les deux courbes est d'un ordre inférieur à $n-1$.

On détermine le système des valeurs des constantes, pour lequel le contact est de l'ordre $n-1$, à l'aide des n équations que l'on obtient en exprimant que l'équation $f(x_1, y_1, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$ et ses $n-1$ équations

différentielles successives

$$\frac{df}{dx_1}dx_1 + \frac{df}{dy_1}dy_1 = 0,$$

$$\frac{df}{dx_1}d^2x_1 + \frac{df}{dy_1}d^2y_1 + \frac{d^2f}{dx_1^2}dx_1^2 + \frac{2d^2f}{dx_1dy_1}dx_1dy_1 + \frac{d^2f}{dy_1^2}dy_1^2 = 0,$$

....

$$\frac{df}{dx_1}d^{n-1}x_1 + \frac{df}{dy_1}d^{n-1}y_1 + \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}dx^{n-1} + \ldots = 0,$$

sont satisfaites lorsqu'à la place des variables x_1, y_1, et de leurs différentielles, on met x, y et les différentielles dx, dy..., relatives à la courbe $F(x, y) = 0$, quelle que soit d'ailleurs la variable indépendante.

Pour obtenir des systèmes de valeurs de a_1, a_2, ... a_n, qui établissent entre la courbe donnée $F(x, y) = 0$ et la courbe $f(x_1, y_1, a_1, a_2 \ldots a_n) = 0$ un contact d'un ordre inférieur à $n - 1$, il suffit de conserver quelques-unes des équations de condition.

1er *Exemple*. Supposons que l'équation d'une courbe présente trois constantes arbitraires, on pourra disposer de ces constantes de manière à ce que cette courbe ait un contact du deuxième ordre avec une autre courbe donnée. Pour cela, en effet, soit

$$f(x_1, y_1, a_1, a_2, a_3) = 0$$

l'équation de la courbe dont il s'agit; en la différentiant deux fois, on aura

$$\frac{df}{dx_1}dx_1 + \frac{df}{dy_1}dy_1 = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx_1^2}dx_1^2 + \frac{2d^2f}{dx_1dy_1}dx_1dy_1 + \frac{d^2f}{dy^2}dy_1^2 + \frac{df}{dx^1}d^2x_1 + \frac{df}{dy_1}d^2y_1 = 0;$$

et pour établir qu'entre cette courbe et une autre courbe donnée $F(x, y) = 0$ il y aura un contact du deuxième

ordre, il suffit d'exprimer que ces équations différentielles sont satisfaites quand, avec les coordonnées du point de contact, on y met pour dx_1, dy_1, d^2x_1, d^2y_1, les valeurs des quantités dx, dy, d^2x, d^2y, tirées de l'équation $F(x, y) = 0$. On obtient ainsi trois équations,

$$f(x, y, z, a_1, a_2, a_3) = 0; \quad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0;$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}dxdy + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{df}{dx}d^2x + \frac{df}{dy}d^2y = 0,$$

dont on pourra tirer les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3, en fonction des coordonnées x, y du point de contact. La substitution de ces valeurs dans l'équation

$$f(x_1, y_1, a_1, a_2, a_3) = 0,$$

conduira à l'équation de la courbe osculatrice.

1er *Exemple*. S'il s'agit d'un cercle dont le point (ξ, η) soit le centre et ρ le rayon, et dont l'équation soit

$$(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 = \rho^2,$$

pour le rendre osculateur de la courbe au point x, y, il faudra déterminer les trois arbitraires ξ, η, ρ, au moyen des trois équations

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \rho^2; \quad (x - \xi)\,dx + (y - \eta)\,dy = 0;$$
$$(x - \xi)\,d^2x + (y - \eta)\,d^2y + dx^2 + dy^2 = 0,$$

ce que nous savions déjà.

2me *Exemple*. Concevons que la courbe

$$f(x_1, y_1, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$$

soit une courbe parabolique dont l'ordonnée est exprimée par une fonction entière de x, de sorte que l'on ait

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-2}x_1^{n-2} + a_{n-1}x_1^{n-1};$$

en prenant x_1 pour variable indépendante, on trouvera

$$y'_1 = a_1 + 2a_2x_1 + 3a_3x_1^2 \ldots + (n-2)a_{n-2}x_1^{n-3} + (n-1)a_{n-1}x_1^{n-2},$$
$$y''_1 = 2a_2 + 2.3.a_3x_1 + \ldots \text{ etc.},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1^{(n-2)} = 1.2.3\ldots(n-2)a_{n-2} + 1.2.3\ldots(n-1)a_{n-1}x_1,$$
$$y_1^{(n-1)} = 1.2.3\ldots(n-1)a_{n-1}.$$

En substituant dans ces équations à $y'_1, y''_1 \ldots y_1^{(n-1)}$ les dérivées $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ tirées de l'équation d'une courbe donnée $F(x, y) = 0$, on déterminera les constantes, de manière que la courbe parabolique ait avec cette courbe un contact de l'ordre $n-1$. On obtiendra très simplement l'équation de cette parabole, en éliminant les constantes entre les n équations de condition

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1},$$
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}$$
$$y'' = \ldots\ldots\ldots, \quad y''' = \ldots\ldots \text{ etc.} \ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)} = 1.2.3\ldots(n-1)a_{n-1},$$

et l'équation

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 \ldots\ldots + a_{n-1}x_1^{n-1}.$$

Pour éliminer, développons le deuxième membre de cette dernière équation suivant les puissances ascendantes de $(x_1 - x)$, en remarquant que l'on a, quel que soit m,

$$x_1^m = [x + (x_1 - x)]^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}(x_1 - x)$$
$$+ \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}x^{m-2}(x_1 - x)^2 \ldots + (x_1 - x)^m.$$

On trouvera ainsi

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$
$$+ \frac{a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}}{1}(x_1 - x) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1.2.3\ldots(n-2)a_{n-2} + 1.2.3\ldots(n-1)a_{n-1}x}{1.2.3\ldots(n-2)}(x_1 - x)^{n-2}$$
$$+ \frac{1.2.3\ldots(n-1)a_{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}(x_1 - x)^{n-1},$$

et en ayant égard aux équations de condition,

$$y_1 = y + \frac{y'}{1}(x_1 - x) + \frac{y''}{1.2}(x_1 - x)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{y^{(n-2)}}{1.2.3\ldots(n-2)}(x_1 - x)^{n-2} + \frac{y^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)}(x_1 - x)^{n-1}.$$

Telle est, sous une forme très simple, l'équation de la courbe parabolique du degré $n-1$, qui a en un point donné (x, y) un contact de l'ordre $n-1$ avec une courbe donnée.

On parvient encore à cette même équation de la manière suivante : La parabole passant par le point (x, y), son équation pourra se mettre sous la forme

$$y_1 - y = a_1(x_1 - x) + a_2(x_1 - x)^2 + \ldots + a_{n-1}(x_1 - x)^{n-1},$$

et pour qu'elle ait un contact de l'ordre $n-1$ avec la courbe $F(x, y) = 0$, il suffit que les valeurs de

$$\frac{dy_1}{dx_1}, \frac{d^2y_1}{dx_1^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}},$$

correspondantes à $x_1 = x$, savoir : a_1, $1.2a_2$, ..., $1.2.3\ldots(n-2)\,a_{n-2}$, $1.2.3\ldots(n-1)\,a_{n-1}$, soient respectivement égales à y', y'', ... $y^{(n-1)}$; on aura donc

$$a_1 = y', \; a_2 = \frac{y''}{1.2}, \ldots a_{n-2} = \frac{y^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}, \; a_{n-1} = \frac{y^{(n-1)}}{1.2\ldots(n-1)};$$

en substituant ces valeurs des constantes dans l'équation de la parabole, on retrouve l'équation déjà obtenue.

Dans le cas particulier où l'on prend $n = 2$, la parabole osculatrice se change en une droite dont l'équation est

$$y_1 - y = y'(x_1 - x),$$

et représente, comme on devait s'y attendre, la tangente au point (x, y) à la courbe donnée.

148. Considérons une courbe plane dont l'équation soit $y = f(x)$. Soient (*fig.* 27) M_0, M deux points pris sur cette

courbe et correspondants aux abscisses x_0, x; l'aire A comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées y_0, y, est une fonction de l'abscisse x que l'on ne peut déterminer que dans un petit nombre de cas particuliers, mais dont il est facile de trouver la différentielle.

En effet, appelons Δx l'accroissement attribué à la variable x, l'accroissement correspondant ΔA de la fonction A représentera l'élément de surface renfermé entre la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées $f(x)$, $f(x+\Delta x)$. Si d'ailleurs $f(x+\theta\Delta x)$ et $f(x+\theta_1\Delta x)$ sont la plus grande et la plus petite des deux ordonnées de la courbe, dans l'intervalle Δx, l'aire ΔA sera comprise entre les deux produits

$$\Delta x\, f(x+\theta\Delta x),\quad \Delta x\, f(x+\theta_1\Delta x),$$

et par suite $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ entre les deux quantités

$$f(x+\theta\Delta x),\quad f(x+\theta_1\Delta x).$$

Or à la limite ces deux quantités deviennent égales entre elles et à $f(x)$; on aura donc aussi

$$\lim.\ \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA}{dx} = \pm f(x) = \pm y,$$

$$dA = \pm\, y\,dx.$$

En supposant que l'aire A croisse avec l'abscisse x, on prendra le signe + quand l'ordonnée y sera négative, le signe — dans le cas contraire.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Usage des coordonnées polaires pour la détermination de la tangente, de l'arc, du rayon de courbure et du centre de courbure d'une courbe plane.

149. Nous prendrons pour coordonnées polaires, 1° le rayon vecteur mené de l'origine au point quelconque (x, y), rayon vecteur qui sera toujours pour nous une quantité positive; 2° l'angle u que fait ce rayon vecteur avec l'axe des x positifs; l'angle u sera positif lorsque le rayon r se sera mû de droite à gauche, négatif dans le cas contraire; cet angle peut d'ailleurs acquérir toutes les valeurs possibles. On a généralement

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u.$$

Pour transformer une formule quelconque en coordonnées polaires, il suffira de substituer dans cette formule, à la place des coordonnées x, y, de leurs dérivées et de leurs différentielles, leurs valeurs tirées de ces deux équations.

1er *Exemple :* On demande de déterminer en coordonnées polaires l'angle τ, que la tangente en un point quelconque fait avec l'axe des x. On a

$$\operatorname{tang} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin u\, dr + r \cos u\, du}{\cos u\, dr - r \sin u\, du} = \frac{\operatorname{tang} u + r \dfrac{du}{dr}}{1 - \operatorname{tang} u \dfrac{r\, du}{dr}},$$

$$r \frac{du}{dr} = \frac{\operatorname{tang} \tau - \operatorname{tang} u}{1 + \operatorname{tang} \tau \operatorname{tang} u} = \operatorname{tang} (\tau - u),$$

donc

$$\text{tang}\,(\tau - u) = r\frac{du}{dr}, \quad \cot\,(\tau - u) = \frac{dr}{r\,du}.$$

Si, en considérant u comme variable indépendante, on désignait par r', r'' les dérivées de r relatives à u, on aurait $\text{tang}\,(\tau - u) = \frac{r}{r'}$, $\cot\,(\tau - u) = \frac{r'}{r}$. Il serait facile dès-lors de trouver l'équation polaire de la tangente et de la normale. L'équation polaire d'une droite, qui passe par un point dont les coordonnées polaires sont u_0, r_0, et qui fait avec le demi-axe des x positifs l'angle τ, est $r\sin(u - \tau) = r_0 \sin(u_0 - \tau)$. En effet, si dans l'équation $\text{tang}\,\tau = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, on substitue pour x, y, x_0, y_0, leurs valeurs, on trouve

$$\text{tang}\,\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau} = \frac{r\sin u - r_0 \sin u_0}{r\cos u - r_0 \cos u_0},$$

$$r(\sin\tau\cos u - \sin u\cos\tau) = r_0(\sin\tau\cos u_0 - \sin u_0\cos\tau),$$

$$r\sin(u - \tau) = r_0 \sin(u_0 - \tau).$$

Cette équation est susceptible d'une transformation avantageuse. En effet, on a

$$u - \tau = (u - u_0) + (u_0 - \tau),$$

$$\sin(u - \tau) = \sin(u - u_0)\cos(u_0 - \tau) + \sin(u_0 - \tau)\cos(u - u_0),$$

et parce que $r\sin(u - \tau) = r_0 \sin(u_0 - \tau)$,

$$r\sin(u - u_0)\cos(u_0 - \tau) + r\sin(u_0 - \tau)\cos(u - u_0) = r_0\sin(u_0 - \tau),$$

$$\cos(u_0 - \tau)\,r\sin(u - u_0) = \sin(u_0 - \tau)\,[r_0 - r\cos(u - u_0)],$$

$$\frac{r\cos(u - u_0) - r_0}{r\sin(u - u_0)} = -\frac{\cos(u_0 - \tau)}{\sin(u_0 - \tau)} = -\cot(u_0 - \tau) = \cot(\tau - u_0);$$

ainsi l'équation d'une droite qui passant par un point (u_0, r_0), fait avec l'axe des x l'angle τ, peut se mettre sous la forme $\frac{r\cos(u - u_0) - r_0}{r\sin(u - u_0)} = \cot(\tau - u_0)$.

Appliquons ces principes à la tangente à une courbe au point (u, r); désignons par υ, ρ ses coordonnées courantes; son équation sera

$$\frac{\rho\cos(\upsilon-u)-r}{\rho\sin(\upsilon-u)}=\cot(\tau-u)=\frac{dr}{rdu}=\frac{r'}{r};$$

telle est l'équation polaire de la tangente. Pour obtenir celle de la normale, il suffit évidemment de remplacer, dans cette équation, l'angle τ par l'angle $\nu=\tau\pm\frac{\pi}{2}$; on aura donc, en désignant par υ, ρ les coordonnées variables de la normale,

$$\frac{\rho\cos(\upsilon-u)-r}{\rho\sin(\upsilon-u)}=-\operatorname{tang}(\tau-u)=-r\frac{du}{dr}=-\frac{r}{r'}.$$

150. Dans le cas des coordonnées polaires, on appelle sous-tangente S_t la partie OT (*fig.* 28) de la perpendiculaire au rayon vecteur OM, comprise entre l'origine et le point où cette perpendiculaire rencontre la tangente; et sous-normale S_n la partie ON de cette perpendiculaire comprise entre le point où elle est rencontrée par la normale et l'origine. Les longueurs $MT = T$ et $MN = N$ seront la tangente et la normale.

Pour calculer plus facilement ces diverses longueurs, appelons α l'angle aigu compris entre la courbe ou la tangente et la perpendiculaire MP au rayon vecteur OM; $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sera l'angle compris entre le même rayon et la tangente, et l'on aura

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\pm(\tau-u),$$

$$\operatorname{tang}\alpha=\pm\cot(\tau-u)=\pm\frac{dr}{rdu}=\pm\frac{d\,\mathrm{l}\,r}{du}=\pm\frac{r'}{r}.$$

De plus, comme tang α sera une quantité essentielle-

ment positive, et que pour de très petites valeurs de Δu le rapport $\frac{\Delta r}{\Delta u}$ se trouvera toujours affecté de même signe que sa limite $\frac{dr}{du} = r'$, on devra, dans l'équation $\tang \alpha = \pm \frac{r'}{r}$, prendre le signe $+$ si le rayon r croît avec u, et le signe $-$ dans le cas contraire. Enfin, en partant de la valeur de $\tang \alpha$, on trouve

$$\cos \alpha = + \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Cela posé, le triangle rectangle OMT donne

$$\mathrm{OT} = \frac{\mathrm{OM}}{\tang \mathrm{OTM}}, \quad \mathrm{S}_t = \frac{r}{\tang \alpha} = \pm \frac{r^2}{r'} = \pm r^2 \frac{du}{dr},$$

$$\mathrm{MT} = \frac{\mathrm{OT}}{\cos \mathrm{OTM}}, \quad \mathrm{T} = \pm \frac{r^2}{r' \cos \alpha},$$

$$\mathrm{T} = \pm \frac{r}{r'} \sqrt{r^2 + r'^2} = r \sqrt{1 + r^2 \frac{du^2}{dr^2}} = r \sqrt{\frac{dr^2 + r^2 du^2}{dr^2}}.$$

Le triangle ONM donne de la même manière

$$\mathrm{ON} = \frac{\mathrm{OM}}{\tang \mathrm{ONM}}, \quad \mathrm{S}_n = \frac{r}{\cot \alpha} = r \tang \alpha = \pm r' = \pm \frac{dr}{du},$$

$$\mathrm{MN} = \sqrt{\mathrm{ON}^2 + \mathrm{OM}^2}, \quad \mathrm{N} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{du^2}} = \sqrt{\frac{dr^2 + r^2 du^2}{du^2}}.$$

151. En désignant par s l'arc de la courbe et par ρ le rayon de courbure, on a, comme nous l'avons vu,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad \frac{1}{\rho} = \pm \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on substitue dans ces dernières formules les valeurs de x, y, tirées des équations

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u,$$

on trouvera, après les réductions effectuées,

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,du^2,\quad \frac{1}{\rho} = \pm\frac{r(dr\,d^2u - du\,d^2r) + (2dr^2 + r^2du^2)\,du}{(dr^2 + r^2du^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on en conclut, en prenant u pour variable indépendante,

$$\frac{ds^2}{du^2} = r^2 + r'^2,\quad \frac{1}{\rho} = \pm\frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On abrége considérablement les calculs qu'entraîne cette substitution, en remplaçant les équations

$$x = r\cos u,\quad y = r\sin u,$$

par les équations équivalentes

$$x + y\sqrt{-1} = re^{u\sqrt{-1}},\quad x - y\sqrt{-1} = re^{-u\sqrt{-1}}.$$

En effet, en prenant, par exemple, u pour variable indépendante, on déduira de ces équations

$$dx + dy\sqrt{-1} = (r' + r\sqrt{-1})e^{u\sqrt{-1}}\,du,$$

$$dx - dy\sqrt{-1} = (r' - r\sqrt{-1})e^{-u\sqrt{-1}}\,du,$$

$$d^2x + d^2y\sqrt{-1} = (r'' - r + 2r'\sqrt{-1})e^{u\sqrt{-1}}\,du^2,$$

$$d^2x - d^2y\sqrt{-1} = (r'' - r - 2r'\sqrt{-1})e^{-u\sqrt{-1}}\,du^2,$$

et par suite,

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = du^2(r^2 + r'^2),\quad \frac{ds^2}{du^2} = r^2 + r'^2;$$

de plus,

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x$$

sera le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le produit

$$(r' - r\sqrt{-1})\left[(r'' - r) + 2r'\sqrt{-1}\right]du^3,$$

et l'on aura

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = (2r'^2 - rr'' + r^2)\,du^3,$$

$$\rho = \pm \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on cesssait de prendre u pour variable indépendante, on trouverait, par cette méthode,

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,du^2,$$

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = r(dr\,d^2u - du\,d^2r) + (2\,dr^2 + r^2\,du^2)\,du, \text{etc.}$$

152. Soient maintenant ξ, η les coordonnées rectangulaires du centre de courbure correspondant au point (x, y) et u_1, r_1 les coordonnées polaires du même centre, liées aux premières par les formules $\xi = r_1 \cos u_1$, $\eta = r_1 \sin u_1$, on aura, comme nous avons vu (n° 134),

$$\frac{\eta - y}{dx} = \frac{\xi - x}{-dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

et l'on en conclura

$$\frac{y(\eta - y) + x(\xi - x)}{y\,dx - x\,dy} = \frac{x(\eta - y) - y(\xi - x)}{x\,dx + y\,dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\xi x + y\eta - (x^2 + y^2)}{y\,dx - x\,dy} = \frac{x\eta - y\xi}{x\,dx + y\,dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Il reste à substituer les coordonnées polaires aux coordonnnées rectangulaires ; or les équations

$$x + y\sqrt{-1} = re^{u\sqrt{-1}}, \quad x - y\sqrt{-1} = re^{-u\sqrt{-1}},$$

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = r_1 e^{u_1\sqrt{-1}}, \quad \xi - \eta\sqrt{-1} = r_1 e^{-u_1\sqrt{-1}},$$

$$dx + dy\sqrt{-1} = (dr + r\,du\sqrt{-1})\,e^{u\sqrt{-1}},$$

$$dx - dy\sqrt{-1} = (dr - r\,du\sqrt{-1})\,e^{-u\sqrt{-1}},$$

donnent

$$x\xi + y\eta = r r_1 \cos(u_1 - u), \quad x^2 + y^2 = r^2,$$
$$y\,dx - x\,dy = -r^2\,du, \quad x\eta - y\xi = r r_1 \sin(u_1 - u),$$
$$x\,dy + y\,dx = r\,dr,$$

et par conséquent,

$$\frac{r_1 \cos(u_1 - u) - r}{-r\,du} = \frac{r_1 \sin(u_1 - u)}{dr}$$
$$= \frac{dr^2 + r^2du^2}{r(dr\,d^2u - du\,d^2r) + (2dr^2 + r^2du^2)\,du}.$$

Si l'on prenait u pour variable indépendante, on aurait simplement

$$1 - \frac{r_1}{r}\cos(u_1 - u) = \frac{r_1}{r'}\sin(u_1 - u) = \frac{r^2 + r'^2}{2r'^2 - rr'' + r^2}$$
$$= \pm\frac{\rho}{\sqrt{r^2 + r'^2}};$$

on tire de cette dernière formule

$$r_1 \sin(u_1 - u) = r'\,\frac{r^2 + r'^2}{2r'^2 - rr'' + r^2},$$
$$r_1 \cos(u_1 - u) = r\,\frac{r'^2 - rr''}{2r'^2 - rr'' + r^2},$$

et par suite

$$\tang(u_1 - u) = \frac{r'}{r}\cdot\frac{r^2 + r'^2}{r'^2 - rr''}, \quad r_1^2 = \frac{r'^2(r^2 + r'^2)^2 + r^2(r'^2 - rr'')^2}{(2r'^2 - rr'' + r^2)^2},$$

ou bien

$$r_1 \sin(u_1 - u) = \pm\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\,\rho = \pm\rho\sin\alpha,$$

$$r_1 \cos(u_1 - u) - r = \mp\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\,\rho = \mp\rho\cos\alpha.$$

153. Il serait facile de parvenir aux équations qui donnent le rayon du cercle osculateur et les coordonnées po-

laires du centre de courbure, en partant des principes que nous avons établis sur le contact des courbes. En effet, le cercle décrit du point (u_1, r_1) comme centre avec le rayon ρ, a pour équation

$$r^2 - 2r_1 r \cos(u_1 - u) + r_1^2 = \rho^2.$$

Pour que ce cercle devienne osculateur d'une courbe donnée en un certain point pris sur cette courbe, c'est-à-dire pour qu'il acquière en ce point avec la courbe un contact du second ordre, il faudra que non-seulement les coordonnées u et r, mais encore les différentielles du, d^2u, dr, d^2r conservent les mêmes valeurs relatives au point de contact dans le passage du cercle à la courbe. En d'autres termes, les valeurs de u, du, d^2u, r, dr, d^2r, tirées des équations de la courbe, devront satisfaire à l'équation du cercle osculateur et à ses équations différentielles du premier et du deuxième ordre. D'ailleurs ces trois dernières équations peuvent s'écrire comme il suit :

$$[r_1 \sin(u - u_1)]^2 + [r_1 \cos(u - u_1) - r]^2 = \rho^2,$$
$$r r_1 \sin(u - u_1)\, du - [r_1 \cos(u - u_1) - r]\, dr = 0,$$
$$r_1 \sin(u - u_1)[r d^2u + 2 du dr] - [r_1 \cos(u - u_1) - r](d^2r - r du^2) = -(dr^2 + r^2 du^2).$$

On en tirera

$$\frac{r_1 \cos(u - u_1) - r}{r du} = \frac{r_1 \sin(u - u_1)}{dr} = \mp \frac{\left\{ [r_1 \sin(u - u_1)]^2 + [r_1 \cos(u - u_1) - r]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{dr^2 + r^2 du^2}}$$
$$= \pm \frac{\rho}{\sqrt{dr^2 + r^2 du^2}} = \frac{r_1 \sin(u - u_1)(r d^2u + 2 du dr) - [r_1 \cos(u - u_1) - r](d^2r - r du^2)}{r(dr d^2u - du d^2r) + (2dr^2 + r^2 du^2) du}$$
$$= -\frac{dr^2 + r^2 du^2}{r(dr d^2u - du d^2r) + (2dr^2 + r^2 du^2) du}.$$

Cette dernière formule contient toutes les équations que nous avons d'abord obtenues.

Il reste à montrer quelques applications de ces formules générales.

1[er] *Exemple :* Spirale d'Archimède, $r = au$. Si l'on désigne par b le rayon vecteur correspondant à $u = 2\pi$, on aura

$$b = 2\pi a, \quad a = \frac{b}{2\pi}, \quad r = \frac{b}{2\pi} u,$$

et la spirale pourra être considérée comme engendrée par une mobile, qui, en même temps que le rayon vecteur fait une révolution, parcourt sur ce rayon vecteur, d'un mouvement uniforme, une longueur b. On aura, dans ce cas particulier,

$$r' = a, \quad r'' = 0, \quad \tang \alpha = \cot(\tau - u) = \frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{\rho} = \left(1 + \frac{1}{u^2+1}\right)\frac{1}{a\sqrt{u^2+1}}, \quad \tang(u_1 - u) = u + \frac{1}{u};$$

$$r_1^2 = a^2 \frac{u^2+(u^2+1)^2}{(u^2+2)^2} = a^2\left[1 - \frac{1}{u^2+2} - \frac{1}{(u^2+2)^2}\right].$$

Pour $u = 0$,

$$r = 0, \quad \tang \alpha = \cot \tau = \tang u_1 = \frac{1}{0} = \infty, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \rho = r_1 = \frac{a}{2};$$

pour $u = \infty$,

$$\tang \alpha = 0, \quad \alpha = 0, \quad \tang(u_1 - u) = \frac{1}{0}, \quad \frac{1}{\rho} = 0, \quad r_1 = a.$$

On conclut facilement de ces valeurs, 1° que la spirale d'Archimède touche, à l'origine des coordonnées, le demi-axe polaire; 2° que pour des valeurs croissantes de u l'angle α et la courbure $\frac{1}{\rho}$ décroissent indéfiniment, tandis que la valeur de r_1 croît sans cesse, mais de manière à rester comprise entre les limites $\frac{a}{2}$ et a; 3° que pour des valeurs très considérables de u, le rayon r_1, mené de l'origine au centre de courbure, est sensiblement égal à a et sensiblement perpendiculaire au rayon vecteur r. En éli-

minant a entre les équations qui donnent $\tang(u_1 - u)$ et r_1, on obtiendrait l'équation de la développée de la spirale d'Archimède, développée qui est elle-même une nouvelle spirale offrant un point d'arrêt correspondant aux coordonnées $r_1 = \frac{a}{2}$, $u_1 = \frac{\pi}{2}$, normale en ce point au cercle décrit de l'origine comme centre, et qui, en s'éloignant de ce même cercle, fait autour de l'origine une infinité de révolutions, de manière à s'approcher de plus en plus d'un second cercle concentrique au premier, et décrit avec un rayon deux fois plus grand. Comme la circonférence et la nouvelle spirale qui s'en approche ne se rencontreront jamais, on peut dire que ces deux courbes sont asymptotes l'une de l'autre.

2me *Exemple :*

$$r = au^n, \quad r' = nau^{n-1} = \frac{nr}{u}, \quad r'' = \frac{n(n-1)r}{u^2},$$

$$\tang\alpha = \cot(\tau - u) = \frac{n}{u}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{n(n+1) + u^2}{(n^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{au^{n-1}},$$

$$\tang(u_1 - u) = u + \frac{n^2}{u}, \quad r_1^2 = \frac{u^2 + (n^2+u^2)^2}{[n(n+1)+u^2]^2} n^2a^2u^{2n-2};$$

pour $u = 0$,

$$\tang\alpha = \cot\tau = \frac{1}{0}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2};$$

pour $u = \infty$,

$$\tang\alpha = 0, \quad \alpha = 0, \quad \tang(u_1 - u) = \frac{1}{0}.$$

On en conclura que la courbe touche à l'origine le demi-axe polaire, et devient, pour de grandes valeurs de u, sensiblement perpendiculaire au rayon r. Dans la même hypothèse les valeurs de ρ et de r_1 correspondantes à des valeurs nulles ou infinies de l'angle u, seront, comme cet angle, nulles ou infinies, à moins que $n = 1$.

3me *Exemple :* Spirale hyperbolique, ainsi nommée à

raison de l'analogie de son équation $ru = a$ (a désignant une constante positive) avec celle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. Elle prend son origine à une distance infinie et forme une infinité de révolutions autour du pôle dont elle s'approche indéfiniment, mais sans l'atteindre, puisque l'on n'a $r = 0$ qu'en attribuant à l'angle u une valeur infinie. On a dans ce cas,

$$r' = -\frac{a}{u^2}, \quad r'' = \frac{2a}{u^3},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\cot(\tau - u) = \frac{1}{u}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{u^4}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{a},$$

$$\operatorname{tang}(u_1 - u) = u + \frac{1}{u}, \quad r_1^2 = \left[\frac{1}{u^2} + \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)^2\right]\frac{a^2}{u^4};$$

pour $u = 0$,

$$\operatorname{tang}\alpha = -\cot\tau = \operatorname{tang}u_1 = \frac{1}{0}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \rho = r_1 = \frac{1}{0};$$

pour $u = \infty$,

$$\operatorname{tang}\alpha = 0, \quad \alpha = 0, \quad \operatorname{tang}(u_1 - u) = \frac{1}{0}, \quad \rho = r_1 = 0.$$

De ces équations l'on conclut, 1° que l'angle α est sensiblement droit et la courbure sensiblement nulle pour de très petites valeurs de u, c'est-à-dire dans la partie de la spirale hyperbolique qui est très éloignée de l'origine et se confond à très peu près avec l'asymptote $y = a$ de cette courbe; 2° que, pour des valeurs croissantes de l'angle u, l'angle α diminue sans cesse, depuis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\alpha = 0$, c'est-à-dire que la spirale tend toujours à devenir perpendiculaire au rayon vecteur; 3° que le rayon de courbure ρ et le rayon vecteur du centre de courbure r_1 dont les valeurs sont d'abord très grandes finissent par s'évanouir. En éliminant u entre les équations qui donnent $\operatorname{tang}(u_1 - u)$ et r_1, on obtiendrait l'équation de la développée qui sera une nouvelle spirale s'approchant aussi

indéfiniment de l'origine sans pouvoir jamais l'atteindre.

4me *Exemple :* Spirale logarithmique $u = \mathrm{L}r$, $r = a^u$, $r = e^{u\mathrm{l}a}$ (a désignant la base du système de logarithmes représenté par la caractéristique L, base que nous supposerons plus grande que l'unité). Pour $u = 0$, on a $r = 1$. Lorsque l'angle u croît positivement, r augmente de plus en plus. Ainsi, en partant du point A, la courbe forme autour de l'origine une infinité de circonvolutions et s'éloigne indéfiniment de ce point. Si l'angle u croît négativement, le rayon vecteur diminue de plus en plus et la courbe s'approche indéfiniment de l'origine, sans pouvoir jamais l'atteindre.

De l'équation $r = e^{u\mathrm{l}a}$ on tirera

$$r' = r\,\mathrm{l}a, \quad r'' = r\,\mathrm{l}a^2,$$
$$\operatorname{tang}\alpha = \cot(\tau - u) = \mathrm{l}a,$$
$$\rho = (1 + \mathrm{l}a^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{u\mathrm{l}a} = (1 + \mathrm{l}a^2)^{\frac{1}{2}}\, r = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

L'angle α est donc constant, c'est-à-dire que la tangente, et par suite la normale, font constamment le même angle avec le rayon vecteur. De plus, pour obtenir le rayon de courbure en un point quelconque M, il suffit (*fig.* 29) de mener par les points M et O deux perpendiculaires, l'une $\mathrm{O}\mu$ au rayon vecteur OM, l'autre $\mathrm{M}\mu$ à la tangente MT; $\mathrm{M}\mu$ sera le rayon de courbure cherché. En effet, on a $\mathrm{M}\mu = \dfrac{r}{\cos\alpha} = \rho$. Cette construction et l'équation $\rho = \dfrac{r}{\cos\alpha}$ montrent que ce rayon de courbure est égal à la normale. A l'aide de cette propriété, on démontrerait très simplement que la développée de la spirale logarithmique est une autre spirale logarithmique. En effet, u_1, r_1 étant les coordonnées du centre de courbure, on a

$$u_1 = u + \frac{\pi}{2}, \qquad r_1 = \mathrm{S}_n = \frac{dr}{du} = r' = r\,\mathrm{l}a = \mathrm{l}a\, e^{u\mathrm{l}a};$$

d'où l'on tire, en substituant pour u sa valeur $u = u_1 - \frac{\pi}{2}$,

$$r_1 = \mathrm{l}a e^{\mathrm{l}a\left(u_1 - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\mathrm{l}a\left(u_1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\mathrm{l.l}a}{\mathrm{l}a}\right)},$$

ou en posant $\mathrm{l}a e^{-\mathrm{l}a\frac{\pi}{2}} = e^b$,

$$r_1 = e^{bu_1},$$

équation d'une nouvelle logarithmique que l'on décrirait en faisant tourner la première autour de l'origine, de manière que chacun de ses points décrive, avec un mouvement de rotation direct ou de droite à gauche, un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{l}a'}{a'}$ (a' étant égal à $\mathrm{l}a$). On serait parvenu au même résultat en partant des équations faciles à établir

$$r_1 \sin(u_1 - u) = r' = \frac{r}{a}, \quad r_1 \cos(u_1 - u) = 0,$$

d'où l'on conclurait

$$u_1 = u + \frac{\pi}{2}, \quad r_1 = r\mathrm{l}a; \text{ etc.}$$

154. Terminons ce que nous avions à dire sur l'emploi des coordonnées polaires, en cherchant la différentielle du secteur compris entre la courbe et deux rayons vecteurs quelconques. Pour cela considérons le secteur OAM = S (*fig.* 30) décrit par un rayon vecteur que nous supposons se mouvoir de telle sorte que le secteur S croisse en même temps que l'angle u; S sera une fonction de u que l'on ne peut déterminer généralement, mais dont on peut trouver facilement la différentielle. En effet, donnons à u un accroissement Δu, le secteur prendra un accroissement $\Delta S = OMm$. Du point O, avec les rayons OM, Om, décrivons deux arcs de cercle MM', mm'. En supposant que l'accroissement Δu soit assez petit pour que dans l'intervalle de u à $u + \Delta u$, le rayon vecteur ait

constamment crû ou diminué, l'accroissement ΔS sera compris entre les deux secteurs circulaires MOM', mOm' ou entre les deux quantités $\frac{r^2 \Delta u}{2}$ et $(r+\Delta r)^2 \frac{\Delta u}{2}$. Le rapport $\frac{\Delta S}{\Delta u}$ sera donc aussi compris entre les deux rapports $\frac{r^2}{2}$ et $\frac{(r+\Delta r)^2}{2}$ qui, à la limite, sont tous deux égaux à $\frac{r^2}{2}$. Donc

$$\lim. \frac{\Delta S}{\Delta u} = \frac{dS}{du} = \frac{r^2}{2}, \quad dS = \frac{r^2 du}{2}.$$

Il est évident que si le secteur décroît quand l'angle u augmente, on aura

$$dS = -\frac{r^2 du}{2}.$$

Si l'on voulait avoir en coordonnées rectangulaires la valeur de dS, il suffirait de remarquer que les formules

$$x + y\sqrt{-1} = re^{u\sqrt{-1}}, \quad x - y\sqrt{-1} = re^{-u\sqrt{-1}},$$
$$dx + dy\sqrt{-1} = e^{-u\sqrt{-1}}(dr - rdu\sqrt{-1}),$$

donnent

$$xdy - ydx = r^2 du,$$

donc

$$dS = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

Cette équation, comme l'équation $dS = \frac{r^2 du}{2}$, suppose que le secteur augmente ou diminue en même temps que l'angle u; autrement on aurait

$$dS = -\frac{r^2 du}{2} = -\frac{xdy - ydx}{2}.$$

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

Propriétés des courbes planes ou à double courbure, situées d'une manière quelconque dans l'espace. — Tangentes, plans tangents. — Normales, plan normal. — Asymptotes. — Points singuliers.

---

155. Considérons une courbe quelconque et sur cette courbe deux points M et M', dont les coordonnées soient

$$(x, y, z), \quad (x + \Delta x, \; y + \Delta y, \; z + \Delta z).$$

La sécante qui passera par ces deux points fera avec les axes des angles a, b, c, dont les cosinus seront proportionnels aux différences des coordonnées des deux points, et l'on aura

$$\frac{\cos a}{\Delta x} = \frac{\cos b}{\Delta y} = \frac{\cos c}{\Delta z} = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

$$\cos a = \pm \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \cos b = \pm \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

$$\cos c = \pm \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}.$$

Concevons à présent que le point M' vienne à se rapprocher indéfiniment du point M, la sécante qui joint ces deux points tendra de plus en plus à se confondre avec une droite que l'on nomme tangente à la courbe donnée, et qui touche cette courbe au point (x, y). Si l'on désigne par α, β, γ les angles que cette tangente fait avec les axes; par ξ, η, ζ les coordonnées de l'un quelconque de

ses points, on aura

$$\cos\alpha = \lim. \pm \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos\beta = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \cos\gamma = \pm \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}:$$

telles sont donc les équations de la tangente que l'on déduirait immédiatement des équations

$$\frac{\cos a}{\Delta x} = \frac{\cos b}{\Delta y} = \frac{\cos c}{\Delta z},$$

en passant à la limite, et qui s'étendent même au cas où x, y, z représenteraient des coordonnées obliques.

On dit qu'une droite est normale à une courbe en un point donné, lorsqu'elle est perpendiculaire à la tangente en ce point.

Cela posé, on pourra évidemment mener à une courbe par chaque point, une infinité de normales qui seront toutes comprises dans un même plan. Ce plan unique est ce qu'on appelle le plan normal. Il est perpendiculaire à la tangente, et passe par le point (x, y, z). Son équation sera donc, en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées de l'un quelconque de ses points,

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0,$$

ou, en mettant pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les quantités proportionnelles dx, dy, dz,

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

156. Supposons que $u = F(x, y, z) = 0$, $v = f(x, y, z) = 0$, soient les équations de la courbe donnée, c'est-à-dire les équations de deux surfaces qui la renferment, on aura,

en différentiant,

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,$$

$$\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz=0,$$

d'où l'on tire, en éliminant tour à tour dz, dy, dx,

$$\frac{dx}{\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}}=\frac{dy}{\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}}=\frac{dz}{\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}},$$

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}}=\frac{\cos 6}{\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)^2}};$$

et les équations de la tangente et du plan normal deviennent

$$\frac{\xi-x}{\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}}=\frac{\eta-y}{\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}}=\frac{\zeta-z}{\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}},$$

$$\left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\right)(\xi-x)+\left(\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}\right)(\eta-y)$$
$$+\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)(\zeta-z)=0.$$

Les dénominateurs ou les coefficients de $\xi-x$, $\eta-y$, $\zeta-z$ se forment très simplement, en écrivant sur deux lignes les quantités

$$\begin{array}{llllll}\frac{du}{dx}, & \frac{du}{dy}, & \frac{du}{dz}, & \frac{du}{dx}, & \frac{du}{dy}, & \frac{du}{dz},\\ \frac{dv}{dx}, & \frac{dv}{dy}, & \frac{dv}{dz}, & \frac{dv}{dx}, & \frac{dv}{dy}, & \frac{dv}{dz},\end{array}$$

partagées en trois groupes, et multipliant en croix.

Si dans les deux équations différentielles

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

$$\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz = 0,$$

on substitue, pour dx, dy, dz, les quantités proportionnelles $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$; ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point quelconque de la tangente, on a, pour les deux équations de cette ligne,

$$(\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} + (\zeta - z)\frac{du}{dz} = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{dv}{dx} + (\eta - y)\frac{dv}{dy} + (\zeta - z)\frac{dv}{dz} = 0.$$

Ces équations représentent deux plans qui ont la tangente pour commune intersection.

Si l'une des équations de la courbe, $u = 0$, par exemple, ne renfermait que deux variables x, y, elle représenterait la projection de la courbe sur le plan des $\overline{xy}$, et l'équation

$$(\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} = 0$$

représenterait à la fois et la projection de la tangente à la courbe dans l'espace, et la tangente à la projection; et comme le plan des $\overline{xy}$ est quelconque, on en conclurait généralement que la projection de la tangente à une courbe quelconque sur un plan donné se confond toujours avec la tangente à la projection de la courbe sur ce même plan. Ce théorème résulte d'ailleurs évidemment de la définition même de la tangente, puisque les tangentes à la courbe et à sa projection sont les limites dont s'approchent indéfiniment la sécante et sa projection.

On appelle plan tangent à une courbe donnée un plan

quelconque passant par la tangente; il en existe donc une infinité, et en appelant généralement l, m, n les angles que la perpendiculaire à l'un quelconque de ces plans fait avec les axes, il sera réellement tangent si l'on a

$$\cos l \cos\alpha + \cos m \cos\beta + \cos n \cos\gamma = 0.$$

157. On déterminera avec facilité les asymptotes d'une courbe tracée d'une manière quelconque dans l'espace, soit en remarquant que ces asymptotes auront pour projections sur les plans des coordonnées les asymptotes des projections de la courbe, soit en observant que si

$$y = mx + p, \quad z = nx + q,$$

sont les équations de ces asymptotes, les valeurs de y et de z tirées des équations de la courbe donnée pourront se mettre sous la forme

$$y = mx + p + h, \quad z = nx + q + i,$$

h et i se réduisant sensiblement à 0 pour de très grandes valeurs de x. D'où l'on tire évidemment

$$m = \lim.\frac{y}{x}, \quad n = \lim.\frac{z}{x},$$

$$p = \lim.(y - mx), \quad q = \lim.(z - nx).$$

Ainsi, pour calculer les coefficients m et n, il faudra poser dans les équations de la courbe, $y = sx$, $z = tx$; puis chercher la limite ou les limites vers lesquelles convergent les variables s et t, tandis que la valeur de x croît indéfiniment. Après avoir trouvé m et n, on obtiendra p et q en posant

$$y - mx = s_1, \quad z - nx = t_1,$$

et cherchant les limites de s_1 et de t_1.

Le calcul qui précède donnerait seulement les asymp-

totes non parallèles au plan des $\overline{yz}$; mais en changeant entre elles les coordonnées x et y, on obtiendrait les asymptotes non parallèles au plan des $\overline{zx}$ ou au plan des $\overline{zy}$, etc.

Les points d'arrêt ou de rebroussement, les points saillants, les points multiples, en général les points singuliers d'une courbe tracée dans l'espace, ont ordinairement pour projections sur chacun des plans coordonnés des points qui offrent les mêmes singularités, mais qui, parce qu'ils appartiennent à une courbe plane, projection de la courbe donnée, seront facilement déterminés à l'aide des méthodes déjà exposées.

Applications.

158. 1er *Exemple :* L'ellipse produite par l'intersection du cylindre à base circulaire $u = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et du plan $v = Ax + By + Cz = 0$. On trouvera

$$xdx + ydy = 0, \quad Adx + Bdy + Cdz = 0,$$
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{\frac{1}{C}(Bx - Ay)},$$
$$\frac{\cos\alpha}{y} = \frac{\cos 6}{-x} = \frac{\cos\gamma}{\frac{1}{C}(Bx - Ay)} = \pm \frac{C}{[C^2R^2 + (Bx - Ay)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Les équations de la tangente seront

$$\frac{\xi - x}{y} = \frac{\eta - y}{-x} = \frac{\zeta - z}{\frac{1}{C}(Bx - Ay)},$$

ou

$$x(\xi - x) + y(\eta - y) = 0, A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

ou enfin

$$x\xi + y\eta = R^2, \quad A\xi + B\eta + C\zeta = 0.$$

Ces dernières équations représentent, comme on devait

s'y attendre, la tangente au cercle base du cylindre, et le plan même de la courbe.

L'équation du plan normal sera

$$C(\xi y - \eta x) + (Bx - Ay)(\zeta - z) = 0.$$

2me *Exemple :* La courbe produite par l'intersection du cône droit $x^2 + y^2 = R^2 z^2$, et du plan $Ax + By + Cz = 0$.

Les équations de la tangente seront

$$x\xi + \eta y = R^2 z\zeta, \quad A\xi + B\eta + C\zeta = 0;$$

celles du plan normal

$$C(\xi y - \eta x) + (B\xi - A\eta)R^2 z + (Bx - Ay)(\zeta - z - R^2 z) = 0.$$

Les équations de la tangente représentent, comme on pouvait le prévoir, deux plans : le plan de la courbe et un plan passant par l'origine et le sommet du cône.

2me *Exemple :* La courbe intersection de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

et du cylindre droit

$$(x - \tfrac{1}{2}R)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}R^2, \text{ ou } x^2 - Rx + z^2 = 0,$$

dont la base est un cercle qui a pour diamètre le rayon de la sphère. Cette courbe a pour projection sur le plan des $\overline{xy}$, la parabole

$$y^2 = R(R - x);$$

sur le plan des $\overline{zx}$, le cercle

$$x^2 - Rx + z^2 = 0,$$

sur le plan des $\overline{yz}$, la lemniscate

$$R^2 z^2 = y^2 (R^2 - y^2).$$

La tangente à la courbe proposée aura donc pour projections les tangentes à la parabole, au cercle et à la lem-

niscate, c'est-à-dire les trois droites

$$y\eta + \tfrac{1}{2}R\xi = R(R - \tfrac{1}{2}x),$$
$$(x - \tfrac{1}{2}R)\xi + z\zeta = \tfrac{1}{4}R^2,$$
$$R^2 z\zeta - (R^2 - 2y^2)y\eta = y^4.$$

L'équation du plan normal peut être mise sous la forme

$$\frac{\xi}{x} - \frac{\zeta}{z} = \frac{R}{2x}\left(\frac{\eta}{y} - \frac{\zeta}{z}\right),$$

et l'on reconnaît qu'il contient le rayon mené de l'origine au point (x, y).

3me *Exemple :* l'hélice. Considérons un cylindre droit dont la base sur le plan $\overline{xy}$ soit le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

et dans ce cercle un rayon mobile qui, appliqué d'abord sur l'axe des x, tourne indéfiniment autour de l'origine avec un mouvement direct ou rétrograde, c'est-à-dire de droite à gauche, ou de gauche à droite, et soit u l'angle variable décrit par le rayon pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que le mouvement est direct ou rétrograde. Si maintenant, à partir de l'extrémité du rayon mobile, on porte sur la génératrice du cylindre, dans le sens des z positifs lorsque u sera positif, et dans le sens des z négatifs lorsque u deviendra négatif, une longueur proportionnelle à l'angle u, ou, ce qui revient au même, à l'arc $\pm Ru$ compris entre les côtés de cet angle, et représentée en conséquence par un produit de la forme $\pm aRu$, a désignant un nombre constant, l'extrémité de cette longueur décrira une courbe à double courbure, appelée *hélice*, et dont il est facile d'établir les équations et les propriétés. En effet, soient x, y, z, les coordonnées de cette extrémité ou d'un point quelconque de la courbe, on aura évidemment

$$x = R\cos u, \quad y = R\sin u, \quad z = aRu,$$

et l'on en conclura

$$x^2+y^2=R^2, \quad z=aR \text{ arc cos } \frac{x}{R}=aR \text{ arc tang } \frac{y}{x};$$

$$dx=-R\sin u\, du, \quad dy=R\cos u\, du, \quad dz=aR\, du;$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=du^2(1+a^2);$$

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=-\frac{\sin u}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos\zeta=\frac{dy}{ds}=\frac{\cos u}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

et il résulte évidemment de la dernière de ces équations, que l'angle γ formé par la tangente à la courbe avec l'axe des z, et, par suite, avec la génératrice du cylindre, est un angle constant. En vertu de cette propriété, la courbe se développera en ligne droite, quand on développera le cylindre dont elle fait partie. On trouvera de plus, pour les équations de la tangente,

$$\frac{\xi-x}{-\sin u}=\frac{\eta-y}{\cos u}=\frac{\zeta-z}{a},$$

et pour l'équation du plan normal,

$$(\eta-y)\cos u-(\xi-x)\sin u+a(\zeta-z)=0.$$

L'équation $z=aR \text{ arc tang } \frac{y}{x}$ représente la surface héliçoïde engendrée par une droite qui reste toujours comprise dans un plan mobile perpendiculaire à l'axe des z, qui rencontre cet axe au même point que le plan, et qui tourne autour du point de rencontre, de manière à décrire, dans le plan mobile, des angles proportionnels aux distances parcourues par le point dont il s'agit. Cette même surface coupe évidemment le cylindre, suivant deux hélices dont les points correspondants se trouvent situés à égale distance de l'axe des z, sur la droite génératrice de la surface.

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

Du plan osculateur d'une courbe quelconque. — De la normale principale.

159. On appelle plan osculateur d'une courbe quelconque en un point donné, le plan qui contient les deux tangentes menées à ce point et à un point infiniment voisin, ou le plan qui passe par deux tangentes consécutives, ou enfin le plan qui passe par trois points infiniment voisins. En partant de ces définitions, on trouvera facilement l'équation du plan dont il s'agit.

1re *Méthode*. Désignons par x, y, z, les coordonnées du point de la courbe; par α, β, γ, les angles que fait avec les axes la tangente en ce point; par ξ, η, ζ, les coordonnées de l'un quelconque des points du plan osculateur; par l, m, n, les angles inconnus que fait avec les axes la perpendiculaire à ce plan. Son équation sera

$$(\xi - x)\cos l + (\eta - y)\cos m + (\zeta - z)\cos n = 0.$$

Ce plan devant passer par la 1re tangente, et par une tangente très voisine, qui fera avec les axes des angles dont les cosinus seront

$$\cos\alpha + \Delta\cos\alpha = \cos\alpha + d\cos\alpha.(1+\varepsilon'),$$
$$\cos\beta + \Delta\cos\beta = \cos\beta + d\cos\beta.(1+\varepsilon''),$$
$$\cos\gamma + \Delta\cos\gamma = \cos\gamma + d\cos\gamma.(1+\varepsilon'''),$$

(ε', ε'', ε''' étant des quantités très petites), on aura

$$\cos\alpha\ \cos l + \cos\mathcal{C}\ \cos m + \cos\gamma\ \cos n = 0,$$

$$[\cos\alpha + d\cos\alpha.(1+\varepsilon')]\cos l + [\cos\mathcal{C} + d\cos\mathcal{C}.(1+\varepsilon'')]\cos m$$
$$+ [\cos\gamma + d\cos\gamma.(1+\varepsilon''')]\cos n = 0,$$

ou, en réduisant et supposant que, la seconde tangente devenant infiniment voisine de la première, les quantités ε', ε'', ε''', s'évanouissent,

$$\cos\alpha\cos l + \cos\mathcal{C}\cos m + \cos\gamma\cos n = 0,$$
$$d\cos\alpha.\cos l + d\cos\mathcal{C}.\cos m + d\cos\gamma.\cos n = 0.$$

On tire de ces deux équations, jointes à l'équation connue

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

$$\frac{\cos l}{\cos\mathcal{C}d\cos\gamma - \cos\gamma d\cos\mathcal{C}} = \frac{\cos m}{\cos\gamma d\cos\alpha - \cos\alpha d\cos\gamma} = \frac{\cos n}{\cos\alpha d\cos\mathcal{C} - \cos\mathcal{C}d\cos\alpha}$$

$$= \pm \frac{1}{[(\cos\mathcal{C}d\cos\gamma - \cos\gamma d\cos\mathcal{C})^2 + (\cos\gamma d\cos\alpha - \cos\alpha d\cos\gamma)^2 + (\cos\alpha d\cos\mathcal{C} - \cos\mathcal{C}d\cos\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Les valeurs de $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, et par suite l'équation du plan osculateur, se trouveront ainsi complétement déterminées. Comme on a

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\mathcal{C} = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

les équations qui précèdent peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\cos l}{dy\, d\frac{dz}{ds} - dz d\frac{dy}{ds}} = \frac{\cos m}{dz d\frac{dx}{ds} - dx d\frac{dz}{ds}} = \frac{\cos n}{dx d\frac{dy}{ds} - dy d\frac{dx}{ds}}$$

$$= \mp \frac{1}{\left[\left(dy d\frac{dz}{ds} - dz d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(dz d\frac{dx}{ds} - dx d\frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(dx d\frac{dy}{ds} - dy d\frac{dx}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

En prenant l'arc s pour variable indépendante, on aurait

$$\frac{1}{ds} d\frac{dx}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{1}{ds} d\frac{dy}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{1}{ds} d\frac{dz}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2},$$

et par suite

$$\frac{\cos l}{dyd^2z-dzd^2y}=\frac{\cos m}{dzd^2x-dxd^2z}=\frac{\cos n}{dxd^2y-dyd^2x}$$
$$=\frac{\pm 1}{\sqrt{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}}.$$

On a de plus

$$(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2$$
$$=(dx^2+dy^2+dz^2)[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]$$
$$-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2;$$

on a d'ailleurs, puisque s est variable indépendante,

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2,\quad dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z=0,$$

on aura donc enfin

$$\frac{\cos l}{dyd^2z-dzd^2y}=\frac{\cos m}{dzd^2x-dxd^2z}=\frac{\cos n}{dxd^2y-dyd^2x}$$
$$=\pm\frac{1}{ds\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2}}.$$

Si l'on cessait de prendre l'arc s pour variable indépendante, on aurait

$$dy\,d\frac{dz}{ds}-dz\,d\frac{dy}{ds}=\frac{1}{ds^2}[dy(dsd^2z-dzd^2s)-dz(dsd^2y-dyd^2s)]$$
$$=\frac{1}{ds}(dyd^2z-dzd^2y),$$
$$dz\,d\frac{dx}{ds}-dx\,d\frac{dz}{ds}=\frac{1}{ds}(dzd^2x-dxd^2z),$$
$$dx\,d\frac{dy}{ds}-dy\,d\frac{dx}{ds}=\frac{1}{ds}(dxd^2y-dyd^2x).$$

L'équation $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$ donnant d'ailleurs

$$dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z=dsd^2s,$$

on trouverait

$$\frac{\cos l}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{\cos m}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{\cos n}{dxd^2y - dyd^2x}$$
$$= \pm \frac{1}{ds} \frac{1}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Dans le cas particulier où l'on prend x pour variable indépendante, et où l'on désigne par y', z', y'', z'', les dérivées de y et de z du premier et du second ordre, on a

$$\frac{\cos l}{y'z'' - z'y''} = \frac{\cos m}{-z''} = \frac{\cos n}{y''} = \pm \frac{1}{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2}}.$$

Les angles l, m, n étant ainsi déterminés, l'équation du plan osculateur deviendra

$$(\xi - x)(dyd^2z - dzd^2y) + (\eta - y)(dzd^2x - dxd^2z)$$
$$+ (\zeta - z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0,$$

ou, en prenant x pour variable indépendante,

$$(\xi - x)(y'z'' - y''z') - (\eta - y)z'' + (\zeta - z)y'' = 0.$$

2me *Méthode*. Soit toujours

$$(\xi - x)\cos l + (\eta - y)\cos m + (\zeta - z)\cos n = u = 0$$

l'équation cherchée du plan osculateur. S'il doit passer par deux autres points infiniment voisins du point (x, y, z), son équation $u = 0$ devra être vérifiée quand on y remplacera x, y, z par

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z,$$

et $\quad x + 2\Delta x + \Delta^2 x, \quad y + 2\Delta y + 2\Delta^2 y, \quad z + 2\Delta z + \Delta^2 z,$

on devra donc avoir non-seulement $\Delta u = 0$, $du = 0$, mais encore $\Delta^2 u = 0$, $d^2u = 0$: on a d'ailleurs évidemment

$$du = dx \cos l + dy \cos m + dz \cos n,$$
$$d^2u = d^2x \cos l + d^2y \cos m + d^2z \cos n;$$

on aura donc nécessairement

$$dx \cos l + dy \cos m + dz \cos n = 0,$$
$$d^2x \cos l + d^2y \cos m + d^2z \cos n = 0,$$

et l'on tirera de ces dernières équations les valeurs déjà calculées de $\cos m$, $\cos n$, $\cos l$.

160. On appelle normale principale d'une courbe en un point quelconque (x, y, z), celle des normales à la courbe qui se trouve dans le plan osculateur. Dès-lors on voit que la normale principale est l'intersection du plan normal avec le plan osculateur. En appelant λ, μ, ν les angles qu'elle fait avec les axes, ξ, η, ζ les cordonnées de l'un quelconque de ses points, ses équations seront

$$\frac{\xi - x}{\cos \lambda} = \frac{\eta - y}{\cos \mu} = \frac{\zeta - z}{\cos \nu};$$

mais elle doit être perpendiculaire à la tangente et à la normale au plan osculateur qui font avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels aux quantités

$$dx, \quad dy, \quad dz,$$
$$dy\, d^2z - dz\, d^2y, \quad dz\, d^2x - dx\, d^2z, \quad dx\, d^2y - dy\, d^2x;$$

on aura donc

$$\cos \lambda\, dx + \cos \mu\, dy + \cos \nu\, dz = 0,$$
$$\cos \lambda (dy\, d^2z - dz\, d^2y) + \cos \mu (dz\, d^2x - dx\, d^2z) + \cos \nu (dx\, d^2y - dy\, d^2x) = 0,$$

d'où l'on tire, en éliminant d'abord $\cos \nu$,

$$\cos \lambda (dx^2\, d^2y - dx\, dy\, d^2x - dz\, dy\, d^2z + dz^2 d^2y) - \cos \mu (dz^2\, d^2x - dz\, dx\, d^2z - dx\, dy\, d^2y + dy^2\, d^2x) = 0,$$
$$\cos \lambda [(dx^2 + dz^2)\, d^2y - dy (dx\, d^2x + dz\, d^2z)] - \cos \mu [(dz^2 + dy^2)\, d^2x - dx (dz\, d^2z + dy\, d^2y)] = 0;$$

mais les équations

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \quad dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z = ds\, d^2s,$$

donnent

$$dx^2 + dz^2 = ds^2 - dy^2, \quad dx\, d^2x + dz\, d^2z = ds\, d^2s - dy\, d^2y,$$
$$dz^2 + dy^2 = ds^2 - dx^2, \quad dz\, d^2z + dy\, d^2y = ds\, d^2s - dx\, d^2x;$$

donc

$$\cos\lambda\,[(ds^2 - dy^2)d^2y - dy\,(ds\, d^2s - dy\, d^2y)]$$
$$- \cos\mu\,[(ds^2 - dx^2)\, d^2x - dx\,(ds\, d^2s - dx\, d^2x)] = 0,$$
$$\frac{\cos\lambda}{ds\,d^2x - dx\, d^2s} = \frac{\cos\mu}{ds\, d^2y - dy\, d^2s}.$$

En éliminant μ on aurait trouvé de même

$$\frac{\cos\lambda}{ds\, d^2x - dx\, d^2s} = \frac{\cos\nu}{ds\, d^2z - dz\, d^2s}:$$

on aura donc définitivement

$$\frac{\cos\lambda}{ds\, d^2x - dx\, d^2s} = \frac{\cos\mu}{ds\, d^2y - dy\, d^2s} = \frac{\cos\nu}{ds\, d^2z - dz\, d^2s},$$

équations qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\cos\lambda}{d\dfrac{dx}{ds}} = \frac{\cos\mu}{d\dfrac{dy}{ds}} = \frac{\cos\nu}{d\dfrac{dz}{ds}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(d\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\dfrac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\dfrac{dz}{ds}\right)^2}}$$
$$= \pm \frac{ds^2}{\sqrt{(ds\, d^2x - dx\, d^2s)^2 + (ds\, d^2y - dy\, d^2s)^2 + (ds\, d^2z - dz\, d^2s)^2}}.$$

La quantité sous le radical est évidemment égale à

$$ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] + (d^2s)^2\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$
$$- 2ds\, d^2s\,[dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z],$$

ou à

$$ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 + (d^2s)^2 - 2\,(d^2s)^2]$$
$$= ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2],$$

on aura donc définitivement

$$\frac{\cos\lambda}{d\frac{dx}{ds}}=\frac{\cos\mu}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{\cos\nu}{d\frac{dz}{ds}}=\pm\frac{ds}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}},$$

et les équations de la normale principale seront

$$\frac{\xi-x}{d\frac{dx}{ds}}=\frac{\eta-y}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{\zeta-z}{d\frac{dz}{ds}}.$$

Quand on prend l'arc s pour variable indépendante, les équations qui précèdent se réduisent à

$$\frac{\cos\lambda}{d^2x}=\frac{\cos\mu}{d^2y}=\frac{\cos\nu}{d^2z}=\pm\frac{1}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2}},$$

$$\frac{\xi-x}{d^2x}=\frac{\eta-y}{d^2y}=\frac{\zeta-z}{d^2z}.$$

161. Au lieu de définir directement le plan osculateur, pour déterminer ensuite la normale principale à l'aide du plan osculateur, on aurait pu, avec M. Cauchy, définir d'abord la normale principale pour en déduire le plan osculateur en procédant comme il suit.

Lemme. Étant données deux courbes qui se touchent, si, à partir du point de contact, on porte sur ces courbes, prolongées dans le même sens, des longueurs égales mais très petites, la droite qui joindra les extrémités de ces longueurs sera sensiblement perpendiculaire à la tangente commune aux deux courbes.

Démonstration. Supposons que les longueurs égales portées sur la première et la seconde courbe, à partir du point de contact, aboutissent, d'une part, au point (x, y, z), de l'autre au point (ξ, η, ζ); soient de plus s, σ les arcs renfermés, 1° entre un point fixe de la seconde courbe et le point (x, y, z); 2° entre un point fixe de la

seconde courbe et le point (ξ, η, ζ), tandis que les ordonnées $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ varieront simultanément, la différence $s-\sigma$ restera invariable, puisque les petites longueurs portées sur les deux courbes sont par hypothèse égales entre elles; on aura donc

$$\sigma - s = \text{const.},\quad \sigma = s + \text{const.},\quad d\sigma = ds,\quad d\sigma^2 - ds^2 = 0,$$
$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0,$$
$$(d\xi + dx)(d\xi - dx) + (d\eta + dy)(d\eta - dy) + (d\zeta + dz)(d\zeta - dz) = 0.$$

Soient d'ailleurs α, β, γ les angles que forme avec les axes la tangente commune aux deux courbes prolongée dans le même sens que les axes s et σ; δ la longueur de la droite menée du point (ξ, η, ζ) au point (x, y, z); enfin, λ, μ, ν, les angles que forme cette droite avec les demi-axes des coordonnées positives, on aura

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{dx + d\xi}{ds + d\sigma},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{dy + d\eta}{ds + d\sigma},$$
$$\cos\gamma = \frac{dx}{ds} = \frac{d\zeta}{d\sigma} = \frac{dz + d\zeta}{ds + d\sigma};$$
$$\delta = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2};$$
$$\cos\lambda = \frac{\xi - x}{\delta},\quad \cos\mu = \frac{\eta - y}{\delta},\quad \cos\nu = \frac{\zeta - z}{\delta};$$

ces trois dernières fractions, quand la longueur δ sera très petite, seront sensiblement égales aux quantités

$$\frac{d\xi - dx}{d\delta},\quad \frac{d\eta - dy}{d\delta},\quad \frac{d\zeta - dz}{d\delta},$$

de sorte que l'on aura sensiblement

$$\cos\lambda = \frac{d\xi - dx}{d\delta},\quad \cos\mu = \frac{d\eta - dy}{d\delta},\quad \cos\nu = \frac{d\zeta - dz}{d\delta}.$$

Dès-lors, si dans l'équation

$$(d\xi + dx)(d\xi - dx) + (d\eta + dy)(d\eta - dy) + (d\zeta + dz)(d\zeta - dz) = 0,$$

on met à la place des trois sommes les quantités proportionnelles $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et à la place des trois différences, les quantités également proportionnelles $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, on aura

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0,$$

et cette équation exprime bien que la droite menée du point (x, y, z) au point (ξ, η, ζ), est sensiblement perpendiculaire à la tangente commune aux deux courbes.

162. En remplaçant dans le lemme qui précède la seconde courbe par la tangente à la première, on obtiendra le théorème suivant : Si, à partir d'un point donné sur une courbe, on porte sur cette courbe et sur sa tangente prolongées dans le même sens des longueurs égales et très petites, la droite qui joindra les extrémités de ces longueurs sera sensiblement perpendiculaire à la tangente. Cette normale, qui mérite d'être remarquée, est précisément celle que nous aurions pu appeler *à priori* normale principale. Pour fixer sa direction, appelons i la longueur portée sur la tangente et sur la courbe, et substituons à ξ, η, ζ, leurs valeurs

$$\xi=x+i\cos\alpha,\quad \eta=y+i\cos\beta,\quad \zeta=z+i\cos\gamma,$$

dans les équations

$$\cos\lambda=\frac{d\xi-dx}{d\delta},\quad \cos\mu=\frac{d\eta-dy}{d\delta},\quad \cos\nu=\frac{d\zeta-dz}{d\delta},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\cos\lambda}{d\xi-dx}=\frac{\cos\mu}{d\eta-dy}=\frac{\cos\nu}{d\zeta-dz},$$

on trouve de cette manière

$$\frac{\cos\lambda}{d\cos\alpha}=\frac{\cos\mu}{d\cos\beta}=\frac{\cos\nu}{d\cos\gamma},\quad \text{ou}\quad \frac{\cos\lambda}{d\frac{dx}{ds}}=\frac{\cos\mu}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{\cos\nu}{d\frac{dz}{ds}};$$

or ces dernières équations prouvent bien que la normale en question coïncide effectivement avec celle qui est située dans le plan osculateur.

Après avoir ainsi défini d'abord la normale principale, on obtiendrait immédiatement l'équation du plan osculateur, en le définissant un plan qui passe à la fois par la tangente et la normale principale. En effet, si l'on appelle l, m, n les angles que la perpendiculaire à ce plan fait avec les axes, la double condition de passer par la tangente et la normale principale donne

$$\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n=0,$$
$$\cos l\cos\lambda+\cos m\cos\mu+\cos n\cos\nu=0,$$

ou

$$\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n=0,$$
$$\cos l\, d\cos\alpha+\cos m\, d\cos\beta+\cos n\, d\cos\gamma=0;$$

d'où l'on déduirait, comme nous l'avons déjà fait, les valeurs de $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, et par suite l'équation du plan osculateur.



VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

Des deux courbures, du rayon de courbure, du centre de courbure et du cercle osculateur d'une courbe quelconque.

---

163. L'angle compris entre deux tangentes consécutives ou entre les tangentes extrêmes de l'arc infiniment petit $\pm \Delta s$, est ce qu'on nomme l'angle de contingence; désignons par $\Delta\tau$ ce même angle, et par $\Delta\omega$ l'angle infiniment petit compris entre les plans osculateurs qui correspondent aux extrémités de ce même arc, ou, ce qui revient au même, entre les perpendiculaires aux plans dont il s'agit. Les quantités $\Delta\tau$ et $\Delta\omega$ ne pourront s'évanouir constamment que dans certains cas particuliers, savoir : la première, lorsque la courbe proposée se changera en une ligne droite; et la seconde, lorsque cette courbe deviendra plane. Mais en général $\Delta\tau$ et $\Delta\omega$ conserveront des valeurs différentes de o; et l'on pourra en dire autant des limites vers lesquelles convergent les rapports $\pm \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, $\pm \frac{\Delta\omega}{\Delta s}$; pendant que l'arc $\pm \Delta s$ décroîtra indéfiniment, ces limites $\pm \frac{d\tau}{ds}$, $\pm \frac{d\omega}{ds}$, qui seront équivalentes, si l'on considère une courbe plane, l'une à la courbure de cette courbe, l'autre à o, serviront à mesurer dans tous les cas ce que nous appellerons la première et la seconde courbure de la courbe proposée. Ces deux courbures sont réelles; en

effet, pour concevoir une courbe qui n'est pas plane, il faut non-seulement concevoir que la tangente s'incline en changeant de position ; il faut encore que le plan de deux éléments consécutifs varie aussi dans l'espace : cette seconde courbure peut être comparée à la torsion que l'on ferait subir à une courbe plane. Il est d'ailleurs évident que ces deux courbures seront d'autant plus grandes ou d'autant plus petites, que les angles $\Delta\tau$ ou $\Delta\omega$ seront plus grands ou plus petits pour une même valeur de Δs et que par conséquent les rapports $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$, ou mieux les limites $\frac{d\tau}{ds}$, $\frac{d\omega}{ds}$ de ces rapports, seront leur mesure naturelle. Si l'on représente par $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{P}$, ces mêmes courbures, l'on aura donc toujours

$$\frac{1}{\rho} = \pm \lim. \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \pm \frac{d\tau}{ds}, \quad \frac{1}{P} = \pm \lim. \frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \pm \frac{d\omega}{ds}.$$

164. Lorsque l'arc $MM' = \pm \Delta s$ est très petit, sa corde $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ est sensiblement perpendiculaire aux plans normaux menés à la courbe que l'on considère par les deux points (x, y, z), $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, et la plus courte distance MD (*fig.* 31), du point (x, y, z) à la ligne d'intersection des deux plans est sensiblement égale au premier rayon de courbure ρ. En effet, soit r cette plus courte distance MD ; menons par MD un plan perpendiculaire aux deux plans normaux ou à leur commune intersection, et projetons l'arc MM′ sur ce plan. L'arc MM′ étant sensiblement perpendiculaire aux deux plans, il sera aussi sensiblement égal à sa projection, et l'on aura

$$Mm' = \Delta s(1 + \varepsilon),$$

ε étant une quantité très petite. De plus, dans le triangle $Mm'D$, l'angle m' sera sensiblement droit et l'angle

MDm' sera précisément l'angle des deux plans normaux, ou, ce qui revient au même, l'angle $\Delta\tau$ des deux tangentes menées aux extrémités de l'arc $\pm\Delta s$, on aura donc, en exprimant que dans ce triangle les sinus sont proportionnels aux côtés,

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon'\right)}{r}=\pm\frac{\sin\Delta\tau}{(1+\varepsilon)\Delta s}=\pm\frac{\sin\Delta\tau}{\Delta\tau(1+\varepsilon)}\times\frac{\Delta\tau}{\Delta s},$$

et, en faisant converger Δs vers la limite o, on trouvera

$$\frac{1}{\text{lim. } r}=\text{lim.}\pm\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{1}{\rho}.$$

Il importe d'observer que le plan osculateur passe par les deux tangentes consécutives, et qu'il est par conséquent perpendiculaire aux deux plans normaux infiniment voisins et à leur commune intersection; en sorte que la normale, qui est perpendiculaire à cette commune intersection et sur laquelle on compte la longueur r, se confondra sensiblement avec la normale comprise dans le plan osculateur, c'est-à-dire avec la normale principale. Il suit évidemment de ce que nous venons de dire que, pour obtenir le premier rayon de courbure ρ, il suffit de construire la normale principale correspondante au point (x, y, z), et de chercher la portion de cette droite comprise entre ce point et un plan normal très voisin. Le rayon ρ, mesuré de cette manière sur la normale principale, est ce qu'on nomme le rayon de courbure de la courbe proposée relatif au point (x, y, z), et l'on appelle centre de courbure l'extrémité du rayon de courbure, qui peut être considérée comme le point de rencontre de la normale principale, et d'un plan normal infiniment voisin. Le cercle qui a ce dernier point pour centre et le rayon de courbure pour rayon, se nomme cercle de cour-

bure, ou cercle osculateur; il touche la courbe proposée et a même courbure qu'elle. Si par la tangente et par la perpendiculaire au plan osculateur on fait passer un nouveau plan, le centre de courbure sera évidemment situé, par rapport au nouveau plan, du même côté que le point $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, et coïncidera nécessairement avec l'un des points du demi-axe dont la direction est déterminée par les angles λ, μ, ν, que la normale principale fait avec les axes, et qui, comme nous l'avons vu, sont donnés par les équations

$$\frac{\cos\lambda}{d\frac{dx}{ds}}=\frac{\cos\mu}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{\cos\nu}{d\frac{dz}{ds}}.$$

165. Il est facile de calculer la longueur du rayon de courbure, en partant de l'équation qui le définit

$$\frac{1}{\rho}=\pm\lim.\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\pm\frac{d\tau}{ds}.$$

En effet, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha+\Delta\cos\alpha$, $\cos\beta+\Delta\cos\beta$, $\cos\gamma+\Delta\cos\gamma$ étant les cosinus des angles que font avec les axes deux tangentes très voisines, on a

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$(\cos\alpha+\Delta\cos\alpha)^2+(\cos\beta+\Delta\cos\beta)^2+(\cos\gamma+\Delta\cos\gamma)^2=1,$$

$$\begin{aligned}\cos\Delta\tau=\cos\alpha(\cos\alpha+\Delta\cos\alpha)+\cos\beta(\cos\beta+\Delta\cos\beta)&\\+\cos\gamma(\cos\gamma+\Delta\cos\gamma)&;\end{aligned}$$

si de la somme des deux premières équations on retranche le double de la seconde, il vient

$$2(1-\cos\Delta\tau)=(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2.$$

On a d'ailleurs

$$\cos\Delta\tau=1-2\sin^2\frac{\Delta\tau}{2},\quad 2\sin^2\frac{\Delta\tau}{2}=1-\cos\Delta\tau;$$

donc

$$2\sin\frac{\Delta\tau}{2} = \sqrt{(\Delta\cos\alpha)^2 + (\Delta\cos\beta)^2 + (\Delta\cos\gamma)^2},$$

et par suite

$$\lim.\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \lim.\frac{\frac{\Delta\tau}{2}}{\frac{\Delta s}{2}} = \lim.\frac{\sin\frac{\Delta\tau}{2}}{\frac{\Delta s}{2}} = \lim.\frac{2\sin\frac{\Delta\tau}{2}}{\Delta s}$$

$$= \lim.\sqrt{\left(\frac{\Delta\cos\alpha}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\beta}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\gamma}{\Delta s}\right)^2},$$

et enfin,

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{d\tau}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}.$$

En procédant de la même manière, on trouverait pour la seconde courbure

$$\frac{1}{P} = \pm\frac{d\omega}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d\cos l}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos m}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos n}{ds}\right)^2}.$$

Il résulte évidemment de ces formules que la première courbure $\frac{1}{\rho}$ est généralement nulle dans le cas où les angles α, β, γ deviennent constants, et la seconde courbure $\frac{1}{P}$ dans le cas où les angles l, m, n conservent toujours les mêmes valeurs; ce qui s'accorde avec les définitions que nous avons données de ces courbures.

Si dans la valeur du premier rayon de courbure l'on met pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, leurs valeurs $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, il viendra

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2},$$

puis, en développant comme plus haut (n° 160)

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}{ds^4}}$$

$$= \frac{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on prend s pour variable indépendante, il viendra plus simplement,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}{ds^2}.$$

En prenant x pour variable indépendante, on trouverait

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2}}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

166. Si, à partir du point (x, y, z), on porte sur la courbe donnée et sur la tangente prolongées dans le même sens des longueurs infiniment petites, égales à i, et si l'on nomme δ la distance comprise entre les extrémités de ces deux longueurs, on trouvera, en prenant s pour variable indépendante et en remarquant que les coordonnées des extrémités des deux longueurs, sont respectivement

$$x + i\frac{dx}{ds}, \quad y + i\frac{dy}{ds}, \quad z + i\frac{dz}{ds},$$

$$x + i\frac{dx}{ds} + \frac{i^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \varepsilon'\right), \quad y + i\frac{dy}{ds} + \frac{i^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + \varepsilon''\right),$$

$$z + i\frac{dz}{ds} + \frac{i^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} + \varepsilon'''\right),$$

$$\lim.\ \frac{2\delta}{i^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2};$$

donc

$$\rho = \lim.\ \frac{i^2}{2\delta},$$

et par conséquent, pour obtenir le rayon de courbure d'une courbe en un point donné, il suffit de porter sur cette courbe et sur sa tangente prolongées dans le même sens, des longueurs égales et infiniment petites, et de diviser le carré de l'une d'elles par le double de la distance comprise entre leurs extrémités : la limite du quotient est la valeur exacte du rayon de courbure.

En comparant ensemble les équations

$$\frac{\cos\lambda}{d\frac{dx}{ds}}=\frac{\cos\mu}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{\cos\nu}{d\frac{dz}{ds}}=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}},$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{ds}\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

on trouvera

$$\cos\lambda=\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \cos\mu=\rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \cos\nu=\rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

et en prenant s pour variable indépendante,

$$\cos\lambda=\rho\frac{d^2x}{ds^2},\quad \cos\mu=\rho\frac{d^2y}{ds^2},\quad \cos\nu=\rho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

167. Si l'on suppose que le plan $\overline{xy}$ devienne parallèle au plan osculateur, on aura

$$\cos l=0,\quad \cos m=0,\quad \cos n=\pm 1,$$

et par suite, en vertu des équations

$$\cos l\,dx+\cos m\,dy+\cos n\,dz=0;$$
$$\cos l\,d^2x+\cos m\,d^2y+\cos n\,d^2z=0;$$
$$dz=0;\quad d^2z=0,$$
$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le rayon de courbure de la courbe donnée est donc égal en grandeur au rayon de courbure de sa projection sur le plan osculateur. Ces deux rayons de courbure coïncident aussi en direction, puisque la normale principale, située dans le plan osculateur, sera évidemment la normale à la projection de la courbe sur ce plan; donc, etc.

168. Appliquons ces formules à l'hélice représentée par les équations

$$x = \mathrm{R}\cos u, \quad y = \mathrm{R}\sin u, \quad z = a\mathrm{R}u,$$

et prenons u pour variable indépendante, on trouvera

$$dx = -\mathrm{R}\sin u\,du, \quad dy = \mathrm{R}\cos u\,du, \quad dz = a\mathrm{R}\,du,$$

$$d^2x = -\mathrm{R}\cos u\,du^2, \quad d^2y = -\mathrm{R}\sin u\,du^2, \quad d^2z = 0,$$

$$\frac{dx}{-\sin u} = \frac{dy}{\cos u} = \frac{dz}{a} = \mathrm{R}\,du, \quad \frac{d^2x}{\cos u} = \frac{d^2y}{\sin u} = \frac{d^2z}{0} = -\mathrm{R}\,du^2,$$

$$ds = \pm\sqrt{1+a^2}\,.\,\mathrm{R}\,du, \quad d^2s = 0,$$

$$\frac{\cos\alpha}{-\sin u} = \frac{\cos\beta}{\cos u} = \frac{\cos\gamma}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

La différentielle seconde d^2s étant nulle, on devra employer les formules où l'arc s est pris pour variable indépendante, et l'on aura

$$\frac{\cos\lambda}{\cos u} = \frac{\cos\mu}{\sin u} = \frac{\cos\nu}{0} = \pm 1, \quad \cos\nu = 0,$$

$$\frac{\cos l}{-a\sin u} = \frac{\cos m}{a\cos u} = \frac{\cos n}{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{\left(\frac{d\sin u}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos u}{ds}\right)^2}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{du}{ds} = \frac{1}{(1+a^2)\mathrm{R}},$$

$$\rho = (1+a^2)\mathrm{R}.$$

L'équation du plan osculateur sera

$$a(\xi - x)\sin u - a(\eta - y)\cos u + \zeta - z = 0,$$

ou

$$\zeta - z = a(\eta \cos u - \xi \sin u).$$

Enfin l'on aura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{\left(\frac{d\sin u}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos u}{ds}\right)^2} = \frac{a}{R(1+a^2)}.$$

Si à la quantité a on substitue l'angle γ, lié avec a par l'équation $\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, on trouvera

$$\frac{\cos l}{\sin u} = \frac{\cos m}{-\cos u} = \frac{\cos n}{\operatorname{tang}\gamma} = \pm\cos\gamma,\quad \rho = \frac{R}{\sin^2\gamma} = R\,\text{coséc}^2\gamma,$$

$$R = \frac{R}{\sin\gamma\cos\gamma} = 2R\,\text{coséc}\,2\gamma.$$

L'équation $\cos\nu = 0$ prouve que la normale principale de l'hélice au point (x, y, z), coïncide avec la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe des z, ou, ce qui revient au même, avec la génératrice de la surface hélicoïde, représentée par l'équation $z = aR \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$. Donc le plan qui passe par cette génératrice et par la tangente à l'hélice, c'est-à-dire, en d'autres termes, le plan qui touche la surface hélicoïde au point (x, y, z), se confondra nécessairement avec le plan osculateur de l'hélice.

On déduirait directement la valeur $\rho = R\,\text{coséc}^2\gamma$ du rayon de courbure, de l'équation

$$\rho = \lim \frac{i^2}{2\delta},$$

qui dans ce cas deviendra, comme on le prouvera facilement

$$\rho = R\lim.\left(\frac{\Delta s}{R\Delta u}\right)^2 = \frac{ds^2}{R\,du^2} = R(1+a^2) = R\,\text{coséc}^2\gamma.$$

TRENTIÈME LEÇON.

Détermination analytique du centre de courbure. — Développée d'une courbe quelconque.

---

169. Soit ρ le rayon de courbure d'une courbe quelconque, correspondant au point (x, y, z); ξ, η, ζ, les coordonnées de l'extrémité de ce rayon appelée centre de courbure; λ, μ, ν les angles formés avec les demi-axes des coordonnées positives par la droite menée du point (x, y, z) au point (ξ, η, ζ), droite qui coïncide avec la normale principale, on aura

$$\frac{\xi - x}{\rho} = \cos\lambda, \quad \frac{\eta - y}{\rho} = \cos\mu, \quad \frac{\zeta - z}{\rho} = \cos\nu,$$

$$\cos\lambda = \rho \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos\mu = \rho \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos\nu = \rho \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

$$\xi - x = \rho^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta - y = \rho^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \zeta - z = \rho^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

et en remettant pour ρ^2 sa valeur

$$\xi - x = \frac{dsd^2x - dxd^2s}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2} ds^3,$$

$$\eta - y = \frac{dsd^2y - dyd^2s}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2} ds^3,$$

$$\zeta - z = \frac{dsd^2z - dzd^2s}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2} ds^3,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi - x = \frac{dy(dyd^2x - dxd^2y) + dz(dzd^2x - dxd^2z)}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

$$\eta - y = \frac{dz(dzd^2y - dyd^2z) + dx(dxd^2y - dyd^2x)}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

$$\zeta - z = \frac{dx(dxd^2z - dzd^2x) + dy(dyd^2z - dzd^2y)}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Dans le cas où l'on prend x pour variable indépendante, les formules précédentes se réduisent à

$$\xi - x = -\frac{y'y'' + z'z''}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}\rho^2 = -\frac{y'y'' + z'z''}{(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2}(1 + y'^2 + z'^2),$$

$$\eta - y = \frac{z'(z'y'' - z''y') + y''}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}\rho^2 = \frac{z'(z'y'' - z''y') + y''}{(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2}(1 + y'^2 + z'^2),$$

$$\zeta - z = \frac{y'(y'z'' - y''z') + z''}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}\rho^2 = \frac{y'(y'z'' - y''z') + y''}{(y'z'' - y''z')^2 + z''^2 + y''^2}(1 + y'^2 + z'^2).$$

A l'aide de ces équations, on pourra déterminer les coordonnées ξ, η, ζ du centre de courbure, qui, comme on le prouvera facilement, vérifieront en général le système des trois équations

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2$$

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0.$$

De ces trois équations, la première exprime que le centre de courbure est à une distance ρ du point (x, y, z); la deuxième qu'il est dans le plan normal; la troisième, qu'il fait partie du plan osculateur : on aurait pu les écrire *à priori*, et il est essentiel d'observer que l'on retrouve la deuxième et la troisième, lorsqu'on différencie la première et la deuxième en opérant comme si les trois inconnues ξ, η, ζ étaient des quantités constantes.

170. Quand le point (x, y, z) vient à se déplacer sur la courbe donnée, le centre de courbure se déplace en même

temps. Si le premier point se meut d'un mouvement continu sur la courbe dont il s'agit, le second décrira une nouvelle courbe : or pour obtenir les équations de cette dernière, il suffira d'exprimer en fonction d'une seule variable x, y, ou s, à l'aide des équations $u=0$, $v=0$, de la courbe donnée, les seconds membres des équations qui donnent ξ, η, ζ, et d'éliminer cette variable entre ces trois équations. Les deux équations résultantes de cette élimination ne renfermeront plus que les trois variables ξ, η, ζ, et représenteront précisément la ligne qui sera le lieu géométrique de tous les centres de courbure de la courbe donnée.

Pour établir les principales propriétés de cette ligne, différentions par rapport à toutes les variables, les deux équations

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=\rho^2,$$
$$(\xi-x)dx+(\eta-y)dy+(\zeta-z)dz=0.$$

en y regardant x, y, z comme tenant la place de leurs valeurs en ξ, η, ζ. En opérant ainsi, on trouve

$$(\xi-x)d\xi+(\eta-y)d\eta+(\zeta-z)d\zeta=\rho d\rho,$$
$$dx\,d\xi+dy\,d\eta+dz\,d\zeta=0.$$

Cette dernière équation prouve que la tangente menée à la nouvelle courbe par le point (ξ, η, ζ), forme un angle droit avec la tangente menée à la courbe donnée par le point (x, y, z). Donc la tangente à la nouvelle courbe est comprise dans le plan normal à la courbe proposée.

De plus, si l'on nomme σ l'arc de la nouvelle courbe compris entre un point fixe et le point mobile ξ, η, ζ, on aura

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=d\sigma^2,$$
$$\frac{d\rho}{d\sigma}=\frac{\xi-x}{\rho}\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{\eta-y}{\rho}\frac{d\eta}{d\sigma}+\frac{\zeta-z}{\rho}\frac{d\zeta}{d\sigma},$$

et il résulte évidemment de cette dernière formule, que le rapport $\frac{d\rho}{d\sigma}$ est égal au cosinus de l'angle aigu ou obtus, formé par le rayon de courbure ρ avec la tangente à la nouvelle courbe. Quand la courbe proposée est plane, cette tangente se confond avec le rayon de courbure ou avec son prolongement, et par conséquent le rapport $\frac{d\rho}{d\sigma}$ se réduit au cosinus d'un angle nul, ou au cosinus de l'angle π, c'est-à-dire à ± 1. On a donc alors

$$d\rho = \pm d\sigma,$$

et l'on en conclut, comme on l'a déjà fait, que l'arc $\Delta\sigma$ est la différence des rayons de courbure correspondant à ses deux extrémités. Mais il n'en est plus de même quand la courbe donnée cesse d'être plane, et dans ce cas le rapport $\frac{d\rho}{d\sigma}$ obtient généralement une valeur numérique différente de l'unité.

171. Concevons qu'un fil inextensible d'une longueur connue, soit fixé par une de ses extrémités à un certain point d'une courbe, et que ce fil, d'abord appliqué sur la tangente menée à la courbe par le point dont il s'agit, vienne à se mouvoir en demeurant toujours tendu, de telle sorte qu'une partie s'enroule sur l'arc renfermé entre le point fixe et le point variable (x, y, z). L'autre partie qui restera droite et touchera la courbe donnée au point (x, y, z), sera terminée par un point mobile qui décrira une nouvelle courbe, que l'on a désignée sous le nom de *développante* de la première. Celle-ci prend, par rapport à la deuxième, le nom de *développée*. On peut facilement établir comme il suit, leurs propriétés respectives.

Soient ξ, η, ζ, les coordonnées du point de la développante, qui correspond au point (x, y, z), de la développée et r la distance entre ces deux points. En désignant

par α, β, γ les angles que fait avec les axes la tangente à la première courbe, qui coïncide avec le rayon r, on aura à la fois

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\xi - x}{r},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\eta - y}{r},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\zeta - z}{r},$$

et par suite,

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz} = + \frac{r}{ds},$$

en supposant que la longueur r est comptée à partir du point (x, y, z), de la développée sur la tangente prolongée dans le même sens que l'arc s. De plus, on aura dans cette hypothèse,

$$r + s = c,\quad dr = - ds;$$

donc

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz} = - \frac{r}{dr},$$

$$\xi - x = - r\frac{dx}{dr},\quad \eta - y = - r\frac{dy}{dr},\quad \zeta - z = - r\frac{dz}{ds},$$

en différenciant ces dernières équations, on trouve

$$d\xi - dx = - dr\frac{dx}{dr} - rd\frac{dx}{dr},\quad d\eta - dy = - dr\frac{dy}{dr} - rd\frac{dy}{dr},$$

$$d\zeta - dz = - dr\frac{dz}{dr} - rd\frac{dz}{dr},$$

ou en réduisant

$$d\xi = - rd\frac{dx}{dr},\quad d\eta = - rd\frac{dy}{dr},\quad d\zeta = - rd\frac{dz}{dr};$$

d'où l'on tire

$$dxd\xi + dyd\eta + dzd\zeta = - rdr\left(\frac{dx}{dr}d\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dr}d\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dr}d\frac{dz}{dr}\right),$$

mais l'on a

$$dr^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = 1, \quad \frac{dx}{dr}d\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dr}d\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dr}d\frac{dz}{dr} = 0;$$

donc

$$dxd\xi + dyd\eta + dzd\zeta = 0.$$

Il résulte de cette dernière formule que les tangentes menées par les points correspondants (x, y, z), (ξ, η, ζ), à la développante et à la développée, se coupent à angle droit. Donc la tangente à la développée est toujours normale à la développante.

Lorsque la développée est connue, ainsi que nous l'avons supposé dans ce qui précède, il suffit pour avoir les équations de la développante de substituer dans les formules

$$\xi - x = -r\frac{dx}{dr}, \quad \eta - y = -r\frac{dy}{dr}, \quad \zeta - z = -r\frac{dz}{dr},$$

à la place de x, y, z leurs valeurs exprimées en fonction de s et de remplacer, en outre, r par $c \mp s$, puis d'éliminer s entre ces mêmes formules. En effet, on parviendra de cette manière à deux équations entre ξ, η, ζ qui représenteront évidemment la courbe décrite par l'extrémité de la longueur r.

172. Supposons à présent que l'on cherche non plus une développante, mais une développée de la courbe à laquelle appartiennent les coordonnées variables x, y, z. Appelons ξ, η, ζ les coordonnées variables du point de cette développée qui correspond au point (x, y, z), r la distance entre ces deux points, σ l'arc de cette courbe comptée à partir d'un point fixe; α, β, γ les angles que fait avec les axes la tangente à la développée prolongée dans le sens

de l'arc, on aura

$$\cos\alpha = \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{x-\xi}{r}, \quad \cos 6 = \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{y-\eta}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{d\zeta}{d\sigma} = \frac{z-\zeta}{r},$$

$$r - \sigma = c, \quad dr = d\sigma,$$

$$d\xi = (\xi - x)\frac{dr}{r}, \quad d\eta = (\eta - y)\frac{dr}{r}, \quad d\zeta = (\zeta - z)\frac{dr}{r},$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r^2.$$

Si l'on différentie trois fois de suite cette dernière équation, en prenant l'arc s pour variable indépendante, et en ayant égard aux équations qui précèdent, on trouvera

1°. $(\xi-x)(d\xi-dx)+(\eta-y)(d\eta-dy)+(\zeta-z)(d\zeta-dz)=rdr,$

et, en mettant pour $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, leurs valeurs,

$$-[(\xi - x)dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)dz] + [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]\frac{dr}{r}$$
$$= -[(\xi-x)dx+(\eta-y)dy+(\zeta-z)dz] + rdr = rdr,$$

d'où $(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0;$

2°. En différentiant cette dernière équation,

$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z + d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0,$$

ou, à cause de

$$d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz = 0, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$
$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z = ds^2,$$

et, en mettant pour $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, leurs valeurs,

$$r(d\xi d^2x + d\eta d^2y + d\zeta d^2z) = ds^2dr;$$

3°. En différentiant l'équation

$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z = ds^2,$$

ou

$$(\xi - x)rd^2x + (\eta - y)rd^2y + (\zeta - z)rd^2z = rds^2,$$
$$(\xi - x)d.rd^2x + (\eta - y)d.rd^2y + (\zeta - z)d.rd^2z$$
$$+ rd^2x(d\xi - dx) + rd^2y\,(d\eta - dy) + rd^2z(d\zeta - dz) = d.rds^2;$$

mais

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s = 0,$$
$$r(d\xi d^2x + d\eta d^2y + d\zeta d^2z) = ds^2dr;$$

donc

$$(\xi - x)d.rd^2x + (\eta - y)d.rd^2y + (\zeta - z)d.rd^2z + drds^2 = drds^2,$$
$$(\xi - x)d.rd^2x + (\eta - y)d.rd^2y + (\zeta - z)d.rd^2z = 0.$$

Des quatre équations

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r^2,$$
$$(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0,$$
$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z = ds^2,$$
$$(\xi - x)d.rd^2x + (\eta - y)d.rd^2y + (\zeta - z)d.rd^2z = 0,$$

on tire

$$\frac{(\xi - x)}{dyd.rd^2z - dzd.rd^2y} = \frac{\eta - y}{dzd.rd^2x - dxd.rd^2z} = \frac{\zeta - z}{dxd.rd^2y - dyd.rd^2x}$$
$$= \frac{ds^2}{d^2x(dyd.rd^2z - dzd.rd^2y) + d^2y(dzd.rd^2x - dxd.rd^2z) + d^2z(dxd.rd^2y - dyd.rd^2x)}$$
$$= \pm \frac{r}{\sqrt{[(dyd.rd^2z - dzd.rd^2y)^2 + (dzd.rd^2x - dxd.rd^2z)^2 + (dxd.rd^2y - dyd.rd^2x)]^2}}$$
$$= \pm \frac{r}{\sqrt{\left\{ds^2[(d.rd^2x)^2 + (d.rd^2y)^2 + (d.rd^2z)^2] - [(dxd.rd^2x + dyd.rd^2y + dzd.rd^2z)]^2\right\}}};$$

égalant ces deux dernières fractions, carrant et réduisant, on trouve

$$\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right] \frac{dr^2}{ds^2}$$
$$+ 2\left[\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3}\right] r\frac{dr}{ds}$$
$$+ \left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{dz}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2\right] r^2$$
$$= \left(\frac{dxd^2yd^3z - dxd^2zd^3y + dyd^2zd^3x - dyd^2xd^3z + dzd^2xd^3y - dzd^2yd^3x}{ds^6}\right)^2 r^4,$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$A\frac{dr^2}{ds^2} + Br\frac{dr}{ds} + Cr^2 + Dr^4 = 0.$$

Si l'on substitue dans cette équation pour x, y, z, leurs valeurs, exprimées en fonction de s, elle se réduira à

$$F\left(s, r, \frac{dr}{ds}\right) = 0,$$

et sera ce qu'on nomme une équation différentielle du premier ordre entre r et s, à laquelle on pourra satisfaire par une équation de la forme $\varphi(r, s, c) = 0$, ou $r = \varphi(s, c)$, c désignant une constante arbitraire.

En donnant à c une valeur particulière, on aura r en fonction de s, et si après avoir mis dans les équations

$$(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0,$$
$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z = ds^2,$$
$$(\xi - x)d.rd^2x + (\eta - y)d.rd^2y + (\zeta - z)d.rd^2z = 0,$$

à la place de x, y, z, leurs valeurs en s, on élimine s entre les trois équations résultantes, on obtiendra entre les coordonnées ξ, η, ζ deux équations propres à représenter une développée de la courbe que l'on considère. Cela posé, il est clair que cette courbe aura une infinité de développées qui correspondront aux diverses valeurs de r, ou, ce qui revient au même, aux diverses valeurs de la constante arbitraire c.

Ajoutons que toutes ces développées seront situées sur la surface que l'on obtiendra en éliminant s entre les deux formules

$$(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0,$$
$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z = ds^2.$$

La surface dont nous venons de parler, ou le lieu géométrique de toutes les développées, jouit de plusieurs propriétés remarquables, sur lesquelles nous reviendrons quand nous aurons parlé de l'application du calcul différentiel à la recherche des propriétés des surfaces courbes.



TRENTE-UNIÈME LEÇON.

Du contact des courbes situées d'une manière quelconque dans l'espace. — Courbes osculatrices.

---

173. Considérons deux courbes tracées dans l'espace et qui se touchent en un point donné M; si du point de contact comme centre, et avec un rayon infiniment petit, on décrit une sphère, la surface de la sphère coupera (*fig.* 32) les deux courbes en deux points très voisins l'un de l'autre P et Q; et en admettant les définitions que nous avons données (n° 141), quand il s'agissait de courbes situées dans le plan unique des coordonnées, on obtiendra immédiatement le théorème suivant :

Théorème 1er. Lorsque deux courbes se touchent en un point donné, l'ordre du contact est inférieur d'une unité à l'ordre de la quantité infiniment petite qui représente la distance entre deux points situés sur les deux courbes, également éloignés du point de contact, et dont la distance à ce point est un infiniment petit du premier ordre. Il est bon d'observer que la droite $PQ = 2i\sin\frac{1}{2}\omega$ qui unit ces deux points étant la base d'un triangle isoscèle MPQ, et opposée dans ce triangle au très petit angle ω, sera sensiblement perpendiculaire aux deux côtés de ce triangle, et par suite à la tangente commune aux deux courbes; tangente dont les deux côtés diffèrent très peu. La surface du triangle est d'ailleurs égale au produit $\frac{1}{2}i^2\sin\omega$, et, par conséquent, à une quantité infiniment

petite dont l'ordre $a+2$ surpasse de deux unités l'ordre du contact des courbes.

174. Concevons maintenant que l'on projette les deux courbes et le triangle MPQ sur un plan qui ne soit pas sensiblement perpendiculaire au plan de ce triangle, et qui fasse avec lui un angle ϖ. Les deux projections des courbes auront aussi une tangente commune, et en appelant φ, χ, ψ, les angles que les droites MP, MQ, PQ font respectivement avec leurs projections, on aura

$$mp = \text{MP}\cos\varphi = i\cos\varphi,\quad mq = \text{MQ}\cos\chi = i\cos\chi,$$
$$pq = \text{PQ}\cos\psi = 2i\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\psi,$$
$$mpq = \text{MPQ}\cos\varpi = \tfrac{1}{2}i^2\sin\omega\cos\varpi = i^2\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\varpi$$
$$= \tfrac{1}{2}mp\times pq\times\sin mpq = \tfrac{1}{2}i\cos\varphi\times 2i\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\psi\sin mpq;$$

d'où

$$\sin mpq = \frac{\cos\frac{1}{2}\omega\cos\varpi}{\cos\varphi\cos\psi};$$

la perpendiculaire mr abaissée du point m sur la droite pq sera égale au produit $mp\times\sin mpq$, et l'on aura

$$mr = mp\times\sin mpq = i\cos\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}\omega\cos\varpi}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{i\cos\frac{1}{2}\omega\cos\varpi}{\cos\psi}:$$

or la valeur de l'angle ω étant très petite, et celle des angles ϖ, φ, χ, ψ, étant sensiblement différente de $\frac{\pi}{2}$, les quantités $\cos\frac{1}{2}\omega$, $\cos\varpi$, $\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$ auront des valeurs sensibles, et il suffira de jeter les yeux sur les équations qui donnent pq, mr, pour reconnaître, 1° que la distance pq est, dans l'hypothèse admise, une quantité infiniment petite de l'ordre $a+1$, et qu'elle forme avec la distance mp un angle sensiblement différent de 0; 2° que la distance mr est un infiniment petit du 1er ordre. Observons encore que la tangente commune aux deux courbes projetées se confondant à très peu près avec la droite mp,

formera elle-même, avec la sécante pq, un angle sensible.

Puisque la projection pq de la sécante PQ qui unit deux points situés à des distances du point de contact, égales entre elles et infiniment petites du premier ordre, est un infiniment petit de l'ordre $a + 1$ et fait un angle fini avec la tangente commune aux deux projections, on en conclura (nº 142) que les courbes projetées ou les projections des courbes ont, ainsi que les courbes dans l'espace, un contact de l'ordre a. Nous sommes arrivés à cette conclusion en supposant que le cosinus de l'angle que le plan du triangle MPQ fait avec sa projection mpq avait une valeur finie; mais il est facile de prouver que si ce cosinus était sensiblement nul, c'est-à-dire que si le plan du triangle mpq devenait sensiblement perpendiculaire au plan du triangle MPQ, mais en continuant de former un angle sensible avec les côtés MP, MQ, et par suite avec la tangente commune aux deux courbes dans l'espace, le contact des deux courbes projetées serait encore nécessairement de l'ordre a ou d'un ordre supérieur à a. Alors en effet, les distances mp, mq seraient encore des quantités infiniment petites du premier ordre, tandis que la distance pq serait une infiniment petite d'un ordre au moins égal à $a+1$, ainsi que la droite pr que l'on obtiendrait en décrivant du point m comme centre avec le rayon mp, un arc de cercle qui couperait la seconde courbe au point r; or la distance mp ne peut être une quantité infiniment petite du premier ordre, et la distance pr un infiniment petit de l'ordre $a + 1$ sans que l'ordre de contact des deux courbes projetées soit égal ou supérieur au nombre a; donc, etc.

175. Concevons à présent que l'on projette successivement les deux courbes données sur le plan $\overline{xy}$ et sur le plan $\overline{zx}$; et supposons d'ailleurs que l'angle compris entre

l'axe des x et la tangente commune aux deux courbes diffère sensiblement d'un angle droit, cette tangente ne pourra être sensiblement perpendiculaire ni au plan $\overline{xy}$, ni au plan $\overline{zx}$ qui passent tous les deux par l'axe des x; de plus ces derniers plans ne pourront pas être tous les deux à la fois sensiblement perpendiculaires au plan MPQ, car sans cela leur intersection commune serait sensiblement perpendiculaire aux deux lignes MP et MQ, et par suite à la tangente commune, ce qui est contre l'hypothèse; et par conséquent, en vertu de ce qui précède, le contact des deux projections sur le plan $\overline{xy}$ et sur le plan $\overline{zx}$ sera toujours de l'ordre a ou d'un ordre supérieur à a, et sur l'un des deux plans au moins de l'ordre a seulement, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème 2me. Pour obtenir l'ordre de contact de deux courbes qui se touchent en un point où la tangente commune ne forme pas un angle droit avec l'axe des x, il suffit de chercher les nombres qui indiquent les ordres de contact des deux projections de ces courbes sur les plans $\overline{xy}$ et $\overline{zx}$, chacun de ces nombres, s'ils sont égaux, ou le plus petit d'entre eux, s'ils sont inégaux, indiquera l'ordre du contact des courbes proposées.

Corollaire 1er. La recherche de l'ordre de contact de deux courbes à double courbure, se trouve donc réduite à la recherche de l'ordre de contact de deux courbes planes, c'est-à-dire à un problème déjà résolu. On en conclura, 1° en prenant x pour variable indépendante, et désignant par $y', y'', y''', \ldots z', z'', z''' \ldots$ les dérivées successives des variables y et z considérées comme fonctions de x; 2° en désignant par n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a, que si deux courbes ont entre elles un contact de l'ordre a, les quantités $y, y', y'', \ldots y^{(n)}, z, z', z'', \ldots z^{(n)}$ conserveront les mêmes valeurs

pour le point dont il s'agit dans le passage de la première courbe à la seconde, tandis que chacune des quantités $y^{(n+1)}$, $z^{(n+1)}$, ou au moins l'une des deux, changera de valeur; de sorte que dans le cas où l'ordre de contact sera un nombre entier, il suffira pour déterminer cet ordre, de diminuer d'une unité l'ordre des dérivées successives $y', y'', y''', \ldots z', z'', z''', \ldots$ qui les premières cessent d'être égales quand on passe d'une courbe à l'autre.

Scolie. Si la tangente commune aux deux courbes formait un angle droit avec l'axe des x, elle ne pourrait pas être à la fois perpendiculaire au plan $\overline{xy}$ et au plan $\overline{zx}$, ou aux axes des y et des z; donc, pour déterminer dans cette hypothèse l'ordre de contact des deux courbes, il suffirait de substituer à l'axe des x l'axe des y ou l'axe des z, et de remplacer en même temps le plan $\overline{zx}$ ou $\overline{xy}$ par le plan $\overline{yz}$.

176. On peut, au deuxième théorème, en substituer un autre qui ne soit sujet à aucune restriction, et dont voici l'énoncé :

Théorème 3[me]. Pour obtenir l'ordre de contact de deux courbes qui se touchent en un point donné, il suffit de chercher le nombre qui représente l'ordre de la distance infiniment petite comprise entre les extrémités de deux longueurs égales portées sur les deux courbes, à partir du point de contact dans le cas où les mêmes longueurs deviennent infiniment petites du premier ordre. Le nombre dont il s'agit diminué d'une unité, indique toujours l'ordre du contact.

Démonstration. Soit toujours M (*fig.* 33) le point commun aux deux courbes qui se touchent; soient encore P et Q deux autres points situés sur la première et la seconde courbe à la même distance du point de contact; enfin, concevons qu'à partir du point M on porte sur la se-

conde courbe un arc MR qui soit égal à l'arc MP, les sécantes PR et PQ seront, comme on l'a vu, sensiblement perpendiculaires à la tangente commune; de plus la corde QR étant comprise entre deux points de la seconde courbe très rapprochés du point de contact, sera sensiblement parallèle à cette tangente. Par conséquent dans le triangle rectiligne PQR, les côtés PQ et PR formeront avec le troisième côté QR des angles dont chacun différera très peu d'un angle droit; donc le rapport entre les deux premiers côtés qui est égal au rapport des sinus des angles opposés, différera très peu de l'unité, et en désignant toujours par ω l'angle des deux rayons, et par ε une quantité infiniment petite, on aura $PR = PQ(1+\varepsilon)$, et parce que PQ, corde de l'arc qui mesure ω dans le cercle dont le rayon est i, est égale à $2i\sin\frac{\omega}{2}$, on aura

$$PR = (1+\varepsilon)2i\sin\frac{\omega}{2}.$$

D'ailleurs en remarquant que le rapport d'un arc à la corde a pour limite l'unité, et désignant par ε' une nouvelle quantité infiniment petite, on a arc $MP = (1+\varepsilon')i$. Donc puisqu'en considérant le rayon vecteur i comme infiniment petit du premier ordre, l'arc MP sera lui-même infiniment petit du premier ordre, tandis que, comme nous l'avons vu, le produit $2\,i\sin\frac{\omega}{2}$ et la distance PR seront des infiniment petits de l'ordre $a+1$, a désignant l'ordre de contact des courbes, on obtiendra dans tous les cas cet ordre de contact en diminuant d'une unité le nombre qui exprime l'ordre de la distance infiniment petite PR comprise entre les extrémités de deux longueurs égales et infiniment petites du premier ordre portées sur les deux courbes à partir du point de contact, ce qu'il fallait démontrer.

177. Désignons par $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ les coordonnées des points auxquels aboutissent les longueurs égales sur la première et la seconde courbe, et par δ la distance de ces extrémités, on aura

$$\delta = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

δ ne pourra être un infiniment petit de l'ordre $a+1$ qu'autant que l'une au moins des différences $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$ sera de l'ordre $a+1$, les deux autres étant du même ordre ou d'un ordre plus élevé, ce qui exige, en prenant i pour variable indépendante, que des quantités

$$\begin{array}{lllll} x-\xi, & \dfrac{d(x-\xi)}{di}, & \dfrac{d^2(x-\xi)}{di^2}, \ldots & \dfrac{d^n(x-\xi)}{di^n}, & \dfrac{d^{n+1}(x-\xi)}{di^{n+1}}, \\ y-\eta, & \dfrac{d(y-\eta)}{di}, & \dfrac{d^2(y-\eta)}{di^2}, \ldots & \dfrac{d^n(y-\eta)}{di^n}, & \dfrac{d^{n+1}(y-\eta)}{di^{n+1}}, \\ z-\zeta, & \dfrac{d(z-\zeta)}{di}, & \dfrac{d^2(z-\zeta)}{di^2}, \ldots & \dfrac{d^n(z-\zeta)}{di^n}, & \dfrac{d^{n+1}(z-\zeta)}{di^{n+1}}, \end{array}$$

les dernières seules, ou au moins l'une d'entre elles, ne s'évanouissent pas avec i.

Cela posé, désignons par s et σ les arcs renfermés entre un point fixe de la première courbe et le point (x, y, z), entre un point fixe de la seconde courbe et le point (ξ, η, ζ), et admettons que ces nouveaux arcs soient dirigés dans le même sens que l'arc i; comme les trois variables i, s et σ différeront entre elles de quantités constantes, on aura

$$di = ds = d\sigma,$$

et l'on pourra dès-lors (n° 91), aux expressions qui précèdent, substituer les suivantes

$$\begin{array}{llll} x-\xi, & \dfrac{dx}{ds}-\dfrac{d\xi}{d\sigma}, \ldots & \dfrac{d^nx}{ds^n}-\dfrac{d^n\xi}{d\sigma^n}, & \dfrac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}}-\dfrac{d^{n+1}\xi}{d\sigma^{n+1}}; \\ y-\eta, & \dfrac{dy}{ds}-\dfrac{d\eta}{d\sigma}, \ldots & \dfrac{d^ny}{ds^n}-\dfrac{d^n\eta}{d\sigma^n}, & \dfrac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}}-\dfrac{d^{n+1}\eta}{d\sigma^{n+1}}; \\ z-\zeta, & \dfrac{dz}{ds}-\dfrac{d\zeta}{d\sigma}, \ldots & \dfrac{d^nz}{ds^n}-\dfrac{d^n\zeta}{d\sigma^n}, & \dfrac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}}-\dfrac{d^{n+1}\zeta}{d\sigma^{n+1}}; \end{array}$$

et l'on devra avoir au point de contact

$$x=\xi,\quad \frac{dx}{ds}=\frac{d\xi}{d\sigma},\quad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2\xi}{d\sigma^2},\ldots\quad \frac{d^nx}{ds^n}=\frac{d^n\xi}{d\sigma^n};$$
$$y=\eta,\quad \frac{dy}{ds}=\frac{d\eta}{d\sigma},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2\eta}{d\sigma^2},\ldots\quad \frac{d^ny}{ds^n}=\frac{d^n\eta}{d\sigma^n};$$
$$z=\zeta,\quad \frac{dz}{ds}=\frac{d\zeta}{ds},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2},\ldots\quad \frac{d^nz}{d\sigma^n}=\frac{d^n\zeta}{d\sigma^n}.$$

Or ces équations renferment le théorème suivant :

178. Théorème 4me. Lorsque deux courbes se touchent en un point, si l'on considère les coordonnées x, y, z de chacune d'elles comme des fonctions de l'arc s pris pour variable indépendante, et si l'on suppose cet arc compté sur chaque courbe, de telle manière qu'il se prolonge dans le même sens pour les deux courbes au-delà du point de contact, les variables x, y, z et leurs dérivées successives jusqu'à celles dont l'ordre sera indiqué par le nombre entier n, égal ou immédiatement supérieur à l'ordre du contact, ne changeront pas de valeur dans le passage de la première courbe à la seconde ; les dérivées

$$\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}},\quad \frac{d^{n+1}y}{ds^{n+1}},\quad \frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}},$$

ou au moins l'une des trois, changeront de valeur quand on passera d'une courbe à l'autre.

Du théorème qui précède, joint aux principes établis dans la dix-neuvième leçon, on conclura immédiatement que si deux courbes ayant entre elles un contact de l'ordre a, on désigne par n le nombre entier immédiatement supérieur à a, 1° les n premières différentielles des variables x, y, z, prises relativement à une fonction quelconque r de ces variables, et même les n premières différentielles d'une fonction quelconque t de ces variables, prises par rapport à une autre fonction arbitraire u des

mêmes variables, ne changeront pas de valeurs quand on passera de la première courbe à la seconde; 2° les différentielles de l'ordre $(n+1)$ de x, y, z, prises par rapport à r, ou de t par rapport à u, changeront ordinairement de valeur quand on passera de la première courbe à la seconde, quoique le contraire puisse avoir lieu dans certains cas particuliers.

Corollaire. Rien n'empêche de supposer $r = x$. Dans les corollaires qui précèdent, les dérivées

$$\frac{dx}{dr}, \frac{d^2x}{dr^2}, \ldots \frac{d^nx}{dr^n}, \frac{dy}{dr} \ldots \frac{d^ny}{dr^n}, \frac{dz}{dr}, \ldots \frac{d^nz}{dr^n},$$

deviendront alors

$$1, 0 \ldots 0, \quad \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n};$$

donc si les courbes proposées ont entre elles un contact de l'ordre a, et si l'on prend x pour variable indépendante, les coordonnées y, z et leurs dérivées successives jusqu'à celles de l'ordre n inclusivement, n étant un nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a, conserveront en général les mêmes valeurs relatives au point de contact dans le passage de la première courbe à la seconde. Les dérivées de l'ordre $n+1$ et les suivantes, changeront de valeurs, excepté dans certains cas particuliers.

179. Réciproquement, si les dérivées successives

$$\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots \frac{d^nx}{ds^n}, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2y}{ds^2}, \ldots \frac{d^ny}{ds^n}, \frac{dz}{ds}, \frac{d^2z}{ds^2}, \ldots \frac{d^nz}{ds^n},$$

ne changent pas de valeur quand on passe de la première courbe à la seconde, ces deux courbes auront entre elles un contact d'un ordre au moins égal à n.

Dans cette hypothèse, en effet, les différences $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$, considérées comme fonctions de i, s'évanouiront avec i ainsi que leurs dérivées jusqu'à celles de

l'ordre n inclusivement, et l'on aura, en faisant

$$x-\xi=\varphi(i),\quad y-\eta=\chi(i),\quad z-\zeta=\psi(i),$$

$$x-\xi=\varphi(i)=\frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\theta i),$$

$$y-\eta=\chi(i)=\frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\chi^{(n+1)}(\theta' i),$$

$$z-\zeta=\psi(i)=\frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\psi^{(n+1)}(\theta'' i).$$

Cela posé, les rapports $\frac{x-\xi}{i^\alpha}$, $\frac{y-\eta}{i^\alpha}$, $\frac{z-\zeta}{i^\alpha}$, s'évanouissant avec i tant que α sera plus petit que $n+1$, les trois différences $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, ainsi que la distance

$$\delta=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

seront des quantités infiniment petites d'un ordre au moins égal à $n+1$, et par conséquent les deux courbes auront entre elles un contact d'un ordre au moins égal à n.

180. On dit que deux courbes à double courbure sont osculatrices l'une de l'autre en un point qui leur est commun, lorsqu'elles ont en ce point, non-seulement la même tangente, mais encore le même cercle osculateur, et par conséquent le même plan osculateur, la même normale principale et les mêmes courbures. Dès-lors, pour que deux courbes soient osculatrices en un point correspondant à l'abscisse x, il est nécessaire et il suffit que les coordonnées y, z relatives à cette abscisse, et leurs dérivées du premier et du deuxième ordre, c'est-à-dire les six quantités

$$y,\quad y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad z,\quad z'=\frac{dz}{dx},\quad z''=\frac{d^2z}{dx^2},$$

conservent dans le passage d'une courbe à l'autre les mêmes valeurs numériques et les mêmes signes : en effet, ces

six quantités déterminent complétement la tangente et le cercle osculateur.

De plus, comme on peut exprimer les dérivées y', y'', z', z'', au moyen des différentielles dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, et réciproquement, on en conclut que pour savoir si deux courbes à double courbure sont osculatrices l'une de l'autre, il suffira de prendre pour variable indépendante une fonction quelconque des coordonnées x, y, z, l'arc s par exemple, et d'examiner si les équations des deux courbes fournissent les mêmes valeurs de x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z.

Application. Si l'on veut que le cercle représenté par les deux équations

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2,$$
$$(\xi - x)\cos l + (\eta - y)\cos m + (\zeta - z)\cos n = 0,$$

soit osculateur d'une courbe donnée, il faudra et il suffira, puisque le cercle passe déjà par le point (x, y, z), que les équations différentielles du premier ordre et du second ordre,

$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,d\zeta = 0,$$
$$(\xi - x)\,d^2\xi + (\eta - y)\,d^2\eta + (\zeta - z)\,d^2\zeta + (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = 0,$$
$$\cos l\,d\xi + \cos m\,d\eta + \cos n\,d\zeta = 0,$$
$$\cos l\,d^2\xi + \cos m\,d^2\eta + \cos n\,d^2\zeta = 0,$$

soient vérifiées quand à la place de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d^2\xi$, $d^2\eta$, $d^2\zeta$, on mettra dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, et que l'on ait par conséquent

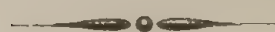
$$(\xi - x)\cos l + (\eta - y)\cos m + (\zeta - z)\cos n = 0,$$
$$\cos l\,dx + \cos m\,dy + \cos n\,dz = 0,$$
$$\cos l\,d^2x + \cos m\,d^2y + \cos n\,d^2z = 0,$$
$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2,$$
$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$
$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = -\,ds^2.$$

Ces six équations, jointes à l'équation connue

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

déterminent complétement un cercle qui sera le cercle osculateur cherché, puisque les angles l, m, n, sont donnés précisément par les trois équations qui fixent la position du plan osculateur, et que les trois autres équations sont celles qui fournissent les coordonnées du centre de courbure et le rayon de courbure.

Corollaire. On conclut de ce qui précède, que deux courbes qui ont entre elles un contact du second ordre ou d'un ordre plus élevé, sont nécessairement osculatrices l'une de l'autre.



TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

Plan tangent et normale aux surfaces courbes.

---

181. Considérons une surface courbe quelconque représentée par l'équation $u = F(x, y, z) = 0$. Si par un point (x, y, z), donné sur cette surface, on en fait passer une seconde $v = 0$, qui la coupe suivant une certaine courbe, la tangente menée en ce point à la courbe dont il s'agit $(u = 0,\ v = 0)$ sera donnée, comme nous l'avons vu, par les deux équations

$$(\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} + (\zeta - z)\frac{du}{dz} = 0,$$
$$(\xi - x)\frac{dv}{dx} + (\eta - y)\frac{dv}{dy} + (\zeta - z)\frac{dv}{dz} = 0,$$

et sera l'intersection des deux plans que ces équations représentent; or, l'un de ces plans, savoir, celui qui a pour équation

$$(\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} + (\zeta - z)\frac{du}{dz},$$

est indépendant de la nature de la seconde surface $v = 0$, et par conséquent aussi de la nature de la courbe d'intersection : donc toutes les courbes formées sur la surface $u = 0$, de manière à passer par le point (x, y, z), auront leurs tangentes en ce point comprises dans un seul plan.

Ce plan unique lieu de toutes les tangentes menées à la surface par le point (x, y, z), est ce qu'on appelle le plan tangent mené à la surface par ce point.

Les raisonnements qu'on vient de faire subsisteraient, et par suite l'équation du plan tangent conserverait la même forme

$$(\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} + (\zeta - z)\frac{du}{dz},$$

si dans la fonction u les variables x, y, z représentaient non plus des coordonnées rectangulaires, mais des coordonnées obliques.

Si en faisant varier x, y, z, on différentie l'équation $u = 0$, on obtient

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz} = 0.$$

En comparant cette dernière équation à celle qui précède, on reconnaît que pour obtenir l'équation du plan tangent, il suffit, dans l'équation différentielle de la surface de remplacer les différentielles dx, dy, dz par les différences $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$.

182. Si par le point (x, y, z) de la surface donnée, on mène une droite perpendiculaire au plan tangent, cette droite sera la *normale* à la surface en ce point.

Soient λ, μ, ν, les angles de cette normale avec les axes; l'équation du plan tangent pourra être mise sous la nouvelle forme

$$(\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu,$$

et l'on aura, par conséquent,

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{du}{dx}} = \frac{\cos\mu}{\frac{du}{dy}} = \frac{\cos\nu}{\frac{du}{dz}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}},$$

et en posant

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \mathrm{R},$$

$$\cos\lambda = \pm\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{du}{dx},\quad \cos\mu = \pm\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{du}{dy},\quad \cos\nu = \pm\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{du}{dz}.$$

Les équations de la normale seront dès-lors

$$\frac{\xi - x}{\frac{du}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{du}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{du}{dz}}.$$

L'angle aigu formé par le plan tangent au point (x, y, z), avec le plan $\overline{xy}$, est ce qu'on nomme l'inclinaison de la surface en ce point. Ce même angle est évidemment égal à l'angle aigu formé par la normale avec l'axe des z, et appelant I cette inclinaison, on a

$$\cos \mathrm{I} = \pm\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{du}{dz},\quad \text{séc}\,\mathrm{I} = \pm\frac{\mathrm{R}}{\frac{du}{dz}}.$$

Quand l'équation de la surface se présentera sous la forme $z = f(x, y)$, on aura

$$u = f(x, y) - z = 0;$$

si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{dz}{dx} = p,\quad \frac{df(x, y)}{dy} = \frac{dz}{dy} = q,$$

il viendra

$$\frac{du}{dx} = p,\quad \frac{du}{dy} = q,\quad \frac{du}{dz} = -1,\quad pdx + qdy - dz = 0,$$

et les équations du plan tangent et de la normale seront

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$
$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = -\frac{\zeta - z}{1},$$

ou

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0;$$

alors aussi, les angles λ, μ, ν, I sont déterminés par les équations

$$\cos\lambda = \pm\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \cos\mu = \pm\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$
$$\cos\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \cos I = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$
$$\text{séc}\, I = \sqrt{p^2+q^2+1}.$$

183. Les équations du plan tangent et de la normale conserveraient la même forme, si l'équation de la surface, au lieu d'être $u = 0$, devenait $u = c$.

De plus, si dans l'équation du plan tangent

$$(\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} + (\zeta - z)\frac{du}{dz} = 0,$$

on regarde les coordonnées ξ, η, ζ comme constantes, et les coordonnées x, y, z comme variables, on obtient non plus l'équation du plan tangent, mais l'équation d'une nouvelle surface qui est le lieu géométrique des points où les diverses surfaces représentées par l'équation $u = c$, dans laquelle on donne à c diverses valeurs, sont rencontrées ou touchées par des plans tangents menés tous par le point (ξ, η, ζ).

De même, si dans la formule

$$\frac{\xi - x}{\frac{du}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{du}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{du}{dz}},$$

on regarde les coordonnées x, y, z comme seules varia-

bles, on obtiendra non plus les équations de la normale à la surface $u=0$, mais les équations d'une courbe, lieu géométrique des points où les diverses surfaces représentées par l'équation $u=c$ sont rencontrées par des droites normales qui concourent toutes au point (ξ, η, ζ).

Supposons que la surface courbe que l'on considère soit représentée par une équation de la forme

$$u+v+w+\ldots=c,$$

les quantités $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$, seront alors remplacées par

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}\ldots,\ \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}\ldots,\ \frac{du}{dz}+\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dz}\ldots;$$

et l'équation du plan tangent deviendra

$$(\xi-x)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\ldots\right)+(\eta-y)\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}+\ldots\right)$$
$$+(\zeta-z)\left(\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dz}+\ldots\right)=0,$$

ou

$$\xi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+\ldots\right)+\eta\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}+\ldots\right)$$
$$+\zeta\left(\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dz}+\ldots\right)$$
$$=x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}+x\frac{dv}{dx}+y\frac{dv}{dy}+z\frac{dv}{dz}$$
$$+x\frac{dw}{dx}+y\frac{dw}{dy}+z\frac{dw}{dz}\ldots\ldots$$

Si d'ailleurs les fonctions u, v, w, sont des fonctions homogènes, la première du degré m, la deuxième du degré $m-1$, la troisième du degré $m-2$, etc., on aura, en vertu d'un théorème connu,

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}=mu,\quad x\frac{dv}{dx}+y\frac{dv}{dy}+z\frac{dv}{dz}=(m-1)v,\ldots$$

et l'équation du plan tangent deviendra, en ayant égard encore à l'équation

$$u + v + w \ldots = c,$$

$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots\right)\xi + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy} + \ldots\right)\eta$$
$$+ \left(\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dz} + \ldots\right)\zeta = mc - v - 2w - \text{etc.}$$

Dans le cas où l'on regardera ξ, η, ζ comme des constantes, x, y, z comme variables, cette dernière équation représentera une surface du degré $m - 1$, lieu géométrique des points de contact de la première avec les plans tangents menés par le point (ξ, η, ζ). Si la surface donnée est du second degré, la seconde se réduira simplement à une surface du premier degré, c'est-à-dire à un plan, et l'on arrive ainsi au théorème suivant :

Si, par un point donné, l'on mène des plans tangents à une surface du second degré, tous les points de contact feront partie d'une même courbe plane.

Si l'on suppose $v = 0$, $w = 0$, l'équation de la surface donnée sera $u = c$, et celle du plan tangent

$$\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\eta + \frac{du}{dz}\zeta = mc.$$

Il peut arriver que le plan tangent mené à une surface par un point donné (x, y, z), ne la rencontre qu'au point dont il s'agit, ou qu'il la touche suivant une ou plusieurs lignes, ou qu'il la traverse. Dans les deux derniers cas, si l'on désigne par

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface, par ξ, η, ζ les coordonnées variables d'une des lignes suivant laquelle cette surface est touchée ou traversée par le plan tangent, ces coordon-

nées vérifieront nécessairement les deux équations

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad \frac{df}{dx}(\xi - x) + \frac{df}{dy}(\eta - y) + \frac{df}{dz}(\zeta - z) = 0.$$

Lorsqu'on peut trouver sur la surface une ou plusieurs lignes droites qui passent par le point (x, y, z), chacune de ces lignes se confond nécessairement avec la tangente, et se trouve par suite comprise dans le plan tangent. Alors les équations qui précèdent doivent pouvoir être remplacées par deux ou plusieurs équations linéaires, ou du premier degré en ξ, η, ζ; et si cela a lieu pour tous les points de la surface, ou quels que soient x, y, z, la surface sera du nombre de celles qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une ligne droite, et qu'on nomme surfaces réglées. Parmi les surfaces de ce genre, on doit remarquer les surfaces développables qui sont touchées par chaque plan tangent suivant une génératrice. Entre les surfaces développables on distingue particulièrement les surfaces cylindriques engendrées par le mouvement d'une droite qui est toujours parallèle à elle-même, et les surfaces coniques dont la génératrice passe toujours par le même point. Les surfaces réglées qui ne sont pas développables s'appellent gauches.

184. *Applications.* 1er *Exemple :* La sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

En différentiant on a $\quad xdx + ydy + zdz = 0;$

l'équation du plan tangent est

$$x(\xi - x) + y(\eta - y) + z(\zeta - z) = 0, \text{ ou } x\xi + y\eta + z\zeta = R^2;$$

les équations de la normale sont $\dfrac{\xi}{x} = \dfrac{\eta}{y} = \dfrac{\zeta}{z}.$

La normale se confond donc avec le rayon mené au point (x, y, z), et le plan tangent avec un plan perpendiculaire à ce rayon.

2[me] *Exemple :* L'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
Le plan tangent a pour équation

$$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}=1;$$

il ne rencontre la surface qu'au point (x, y, z) : en effet, des équations simultanées

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,\quad \frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}=1,$$

jointes à l'équation de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, on tire

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)-\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{a^2}+\frac{\zeta z}{c^2}\right)^2=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left(\frac{y\zeta-z\eta}{bc}\right)^2+\left(\frac{z\xi-x\zeta}{ac}\right)^2+\left(\frac{x\eta-y\xi}{ab}\right)^2=0,$$

et par suite

$$y\zeta-z\eta=0,\quad z\xi-x\zeta=0,\quad x\eta-y\xi=0,$$

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\zeta}{z}=\frac{\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}=1,$$

$$\xi=x,\quad \eta=y,\quad \zeta=z.$$

Les équations de la normale sont

$$\frac{a^2(\xi-x)}{x}=\frac{b^2(\eta-y)}{y}=\frac{c^2(\zeta-z)}{z}.$$

3[me] *Exemple :* L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Les équations de la normale et du plan tangent sont

$$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}-\frac{\zeta z}{c^2}=1,\quad \frac{a^2(\xi-x)}{x}=\frac{b^2(\eta-y)}{y}=-\frac{c^2(\zeta-z)}{z}.$$

Pour déterminer les points de rencontre du plan tangent avec la surface, il faut trouver les systèmes de valeurs de ξ, η, ζ propres à vérifier simultanément les équations

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=1,\quad \frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}-\frac{z\zeta}{c^2}=1;$$

or, de ces deux équations combinées avec la formule $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, on tire

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}\right)^2$$
$$=\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)+\left(1-\frac{z\zeta}{c^2}\right)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left(\frac{x\eta-y\xi}{ab}\right)^2=\left(\frac{\zeta-z}{c}\right)^2.$$

Le plan tangent rencontre donc la surface suivant deux droites génératrices, déterminées par les équations

$$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}-\frac{\zeta z}{c^2}=1,\quad \frac{x\eta-\eta\xi}{ab}=\pm\frac{\zeta-z}{c}.$$

4me *Exemple :* L'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

L'équation du plan tangent est

$$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}-\frac{\zeta z}{c^2}=-1:$$

il n'a de commun avec la surface que le point (x, y, z).

5me *Exemple :* Le paraboloïde elliptique représenté

par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2z}{c}=0.$$

En différentiant, on trouve

$$\frac{x}{a^2}\,dx+\frac{y}{b^2}\,dy=\frac{dz}{c},\quad \frac{du}{dx}=2\frac{x}{a^2},\quad \frac{du}{dy}=2\frac{y}{b^2},\quad \frac{du}{dz}=-\frac{2}{c}.$$

Les équations du plan tangent et de la normale sont

$$(\xi-x)\frac{x}{a^2}+(\eta-y)\frac{y}{b^2}-(\zeta-z)\frac{1}{c}=0,\ \text{ou}\ \frac{x\xi}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}=\frac{z+\zeta}{c},$$

$$\frac{(\xi-x)a^2}{x}=\frac{(\eta-y)b^2}{y}=-\frac{c(\zeta-z)}{1}$$

$$=\frac{x(\xi-x)+y(\eta-y)+2z(\zeta-z)}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2z}{c}}=\frac{x(\xi-x)+y(\eta-y)+2z(\zeta-z)}{0};$$

d'où l'on tire

$$\frac{a^2(\xi-x)}{x}=\frac{b^2(\eta-y)}{y},\quad x(\xi-x)+y(\eta-y)+2z(\zeta-z)=0.$$

Cette dernière équation prouve que la normale au paraboloïde elliptique en un point donné est comprise dans le plan tangent mené par ce point à un ellipsoïde de révolution dont l'équation serait de la forme

$$x^2+y^2+2z^2=C.$$

Dans le cas où l'on considère x, y, z comme seuls variables, l'équation

$$(\xi-x)\frac{x}{a^2}+(\eta-y)\frac{y}{b^2}-(\zeta-z)\frac{1}{c}=0$$

représente un second paraboloïde de même forme que le premier, mais dont l'axe coïncide avec la droite qui a pour équation

$$x=\frac{\xi}{2},\quad y=\frac{\eta}{2},$$

et le sommet avec un point situé sur cet axe et corres-

pondant à l'ordonnée

$$z = \zeta - \frac{c}{4}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}\right).$$

Dans cette même hypothèse, l'équation $\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = \frac{\zeta + z}{c}$ représente un plan qui coupe les deux paraboloïdes suivant une ellipse, lieu des points de contact du paraboloïde donné avec les plans tangents menés par le point (ξ, η, ζ).

Si, entre les trois équations

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 2\frac{\zeta}{c}, \quad \frac{x\xi}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = \frac{\zeta + z}{c}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c},$$

on élimine ζ et z, ou $z + \zeta$, on trouvera

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\left(\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2}\right) = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\xi - x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta - y}{b}\right)^2 = 0,$$

et comme on ne peut satisfaire à cette dernière équation qu'en posant $\xi = x$, $\eta = y$, et par suite $\zeta = z$, on en conclut que le plan tangent n'a de commun avec la surface que le point (x, y, z).

6[me] *Exemple :* Le paraboloïde hyperbolique représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{2y}{b^2}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{2z}{c}.$$

L'équation du plan tangent est

$$\frac{(\xi - x)x}{a^2} - \frac{(\eta - y)y}{b^2} = \frac{\zeta - z}{c}, \quad \text{ou} \quad \frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = \frac{\zeta + z}{c},$$

les équations de la normale sont

$$\frac{a^2(\xi - x(}{x} = -\frac{b^2(\eta - y)}{y} = -c(\zeta - z)$$

$$= \frac{(\xi - x)x + (\eta - y)y + (\zeta - z)2z}{0},$$

ou

$$\frac{a^2(\xi-x)}{x}+\frac{b^2(\eta-y)}{y}=0,\quad (\xi-x)x+(\eta-y)y+(\zeta-z)2z=0.$$

Pour obtenir la ligne d'intersection de la surface avec le plan tangent, il suffit d'assujétir les coordonnées ξ, η, ζ à vérifier à la fois les deux équations

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{2\zeta}{c},\quad \frac{\xi x}{a^2}-\frac{\eta y}{b^2}=\frac{\zeta+z}{c}.$$

Or si entre ces dernières et l'équation de la surface

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c},$$

on élimine ζ et z, ou $z+\zeta$, on trouvera

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}\right)=0,$$

ou

$$\left(\frac{\xi-x}{a}\right)^2=\left(\frac{\eta-y}{b}\right)^2,$$

et l'on en conclura

$$\frac{\xi-x}{a}=\frac{\eta-y}{b},\quad \frac{\xi-x}{a}=-\frac{\eta-y}{b}.$$

Ces deux équations, jointes à celles du plan tangent, représentent deux droites qui sont l'intersection du paraboloïde avec ce même plan : ces deux droites peuvent être regardées comme les génératrices de la surface.

7me *Exemple :* Le paraboloïde hyperbolique

$$xy=cz.$$

L'équation du plan tangent est

$$\eta x+\xi y=c(\zeta+z),$$

les équations de la normale sont

$$x(\xi - x) = y(\eta - y),\ \ x(\xi - x) + y(\eta - y) + 2z(\zeta + z) = 0.$$

Les génératrices sont données par les formules

$$\xi = x,\ \ \eta x + \xi y = c(\zeta - z);\ \ \eta = y,\ \ \eta x + \xi y = c(\zeta - z),$$

et elles sont constamment perpendiculaires l'une à l'axe des x, l'autre à l'axe des y.

8[me] *Exemple :* L'hélicoïde représenté par l'équation

$$z = a\text{R arc tang}\left(\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

ou

$$y = x \text{ tang } \frac{z}{a\text{R}},\quad dz = \frac{a\text{R}\,(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a\text{R}}\,dz = x\,dy - y\,dx.$$

Les équations du plan tangent et de la normale seront

$$\eta x - \xi y = \frac{x^2 + y^2}{a\text{R}}(\zeta - z),\ \text{ et }\ \frac{\xi - x}{-y} = \frac{\eta - y}{x} = \frac{a\text{R}(\zeta - z)}{x^2 + y^2}.$$

Le plan tangent coupe la surface suivant une infinité de lignes dont l'une coïncide avec la génératrice, c'est-à-dire avec la perpendiculaire abaissée du point de contact sur l'axe des z.

185. Quelquefois des lignes ou des points placés sur une surface courbe, offrent des particularités dignes de remarque, et analogues à celles que présentent les points singuliers des courbes. Parmi les points singuliers des surfaces, on doit distinguer ceux par lesquels on peut faire passer une infinité de plans tangents. En chaque point de cette espèce les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ doivent être indéterminées, ce qui ne peut avoir lieu que dans deux cas, savoir : 1° quand l'une au moins des quantités

$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ prend une valeur indéterminée; 2° quand ces trois quantités deviennent nulles ou infinies. Dans l'un et l'autre cas, l'équation du plan tangent devient identique, ou renferme au moins une constante arbitraire.

Considérons, par exemple, le sommet de la surface conique représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2 z^2:$$

le plan tangent a pour équation $\xi x + \eta y = R^2 \zeta z$. Au sommet du cône qui coïncide avec l'origine des coordonnées, on a $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; l'équation du plan tangent se réduit à $0 = 0$: la position de ce plan est donc indéterminée. Pour faire disparaître cette indétermination, posons

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u,$$

d'où l'on conclut

$$z = \pm \frac{r}{R};$$

l'équation du plan tangent devient alors

$$\xi \cos u + \eta \sin u = Rz,$$

et ne dépend que de l'angle u.

Or cet angle, qui est déterminé pour tous les points de la surface conique autres que le sommet, cesse de l'être pour le sommet lui-même, et se change alors en constante arbitraire; car il y a une infinité de manières de satisfaire aux équations

$$x = r\cos u = 0, \quad y = r\sin u = 0.$$

Aux diverses valeurs de cette constante répondent une infinité de plans tangents à la surface conique.



TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

Courbure d'une surface. — Rayons de courbure des sections faites dans la surface par des plans normaux. — Rayons de courbure principaux.

186. On peut apprécier la courbure d'une surface donnée au point (x, y, z), en étudiant la courbure des sections faites dans cette surface par divers plans passant par ce point, et parmi ces sections il importe de considérer surtout celles qui résultent de l'intersection de la surface par les plans normaux, et que l'on appelle sections normales.

Soient $u = 0$ l'équation de la surface, ρ le rayon de courbure de l'une des sections normales relatif au point (x, y, z); ξ, η, ζ les coordonnées du centre de courbure correspondant, on aura

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2,$$

et, puisque l'extrémité ξ, η, ζ se trouve sur la normale au point (x, y, z),

$$\frac{\xi - x}{\frac{du}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{du}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{du}{dz}}.$$

On aura de plus, comme nous l'avons vu,

$$\begin{aligned}(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ = (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0;\end{aligned}$$

et, en différentiant deux fois l'équation $u = 0$,

$$\frac{du}{dx} d^2x + \frac{du}{dy} d^2y + \frac{du}{dz} d^2z + \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2} dz^2 + 2\frac{d^2u}{dy\,dz} dy\,dz + 2\frac{d^2u}{dz\,dx} dz\,dx + 2\frac{d^2u}{dxdy} dxdy = 0,$$

ou $$\frac{du}{dx} d^2x + \frac{du}{dy} d^2y + \frac{du}{dz} d^2z = -\, Q ds^2,$$

en posant, pour abréger,

$$Q = \frac{d^2u}{dx^2}\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy^2}{ds^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{ds^2} + 2\frac{d^2u}{dydz}\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} + 2\frac{d^2u}{dzdx}\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} + 2\frac{d^2u}{dxdy}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}$$
$$= \frac{1}{ds^2}\left(dxd\frac{du}{dx} + dyd\frac{du}{dy} + dzd\frac{du}{dz}\right).$$

Faisons en outre $$R = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2},$$

il viendra

$$\frac{\xi - x}{\frac{du}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{du}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{du}{dz}}$$
$$= \frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}} = \pm\frac{\rho}{R}$$
$$= \frac{(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z}{\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z} = -\frac{ds^2}{Qds^2} = -\frac{1}{Q};$$

donc $$\frac{\xi - x}{\frac{du}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{du}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{du}{dz}} = \pm\frac{\rho}{R} = -\frac{1}{Q},$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{Q}{R}.$$

Cette dernière équation donnera la valeur du rayon de

courbure d'une section normale quelconque. Dans ces formules, R représente une fonction connue des coordonnées x, y, z ; quant à la quantité Q, elle peut être exprimée en fonction de ces coordonnées et des angles $\alpha, 6, \gamma$, que forme avec les axes la tangente menée par le point (x, y, z) à la section normale que l'on considère. On a en effet

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos 6 = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

et par suite

$$Q = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2 6 + \frac{d^2u}{dz^2}\cos^2\gamma + 2\frac{d^2u}{dydz}\cos 6\cos\gamma$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dzdx}\cos\gamma\,\cos\alpha + 2\frac{d^2u}{dxdy}\cos\alpha\,\cos 6.$$

Il suffira donc de donner avec le point (x, y, z) la tangente à la section normale pour déterminer le rayon de courbure ρ de cette section.

187. Lorsqu'on passe d'une section normale à l'autre sans déplacer le point (x, y, z), les angles $\alpha, 6, \gamma$, et par suite Q, ρ et ξ, η, ζ changent de valeur ; si dans ce passage la quantité Q change de signe, le rayon de courbure de l'une des sections normales sera déterminé par l'équation $\frac{1}{\rho} = \frac{Q}{R}$, et le rayon de courbure de l'autre par l'équation $\frac{1}{\rho} = -\frac{Q}{R}$: alors aussi, puisque ρ et R sont essentiellement positifs, et que de plus les quantités $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ sont indépendantes de $\alpha, 6, \gamma$, il faudra nécessairement que les différences $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ changent de signe avec Q. Donc les deux centres de courbure seront situés à l'égard du point (x, y, z) l'un d'un côté, l'autre de l'autre, sur la normale menée par le même point à la surface.

Les rayons de courbure des diverses sections normales, menées par un même point, ont entre eux des relations remarquables, que l'on mettra en évidence en examinant comment le rayon de courbure varie avec les angles α, 6, γ. Pour y parvenir on a recours à une construction géométrique très simple, qui consiste à porter sur chaque tangente une longueur égale à la racine carrée du rayon de courbure correspondant. Les extrémités de ces longueurs forment une courbe plane qui est du second degré : en effet, si l'on appelle ξ, η, ζ les coordonnées de l'une de ces extrémités, on aura

$$\xi - x = \rho^{\frac{1}{2}} \cos\alpha, \quad \eta - y = \rho^{\frac{1}{2}} \cos 6, \quad \zeta - z = \rho^{\frac{1}{2}} \cos\gamma,$$

et en plaçant l'origine au point (x, y, z),

$$\xi = \rho^{\frac{1}{2}} \cos\alpha, \quad \eta = \rho^{\frac{1}{2}} \cos 6, \quad \zeta = \rho^{\frac{1}{2}} \cos\gamma.$$

En tirant de ces équations les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$ et les substituant dans l'équation $Q\rho = \pm R$, où l'on a d'abord mis à la place de Q sa valeur en fonction de ces cosinus, il vient

$$\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 + \frac{d^2u}{dz^2}\zeta^2 + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}\eta\zeta + 2\frac{d^2u}{dz\,dx}\zeta\xi + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}\xi\eta = R.$$

Cette dernière équation, quand on y considère ξ, η, ζ comme seuls variables, représente une surface du second degré qui renferme la courbe plane, lieu de toutes les extrémités. Cette courbe, dont le centre coïncide avec l'origine actuelle, ou avec le point (x, y, z), est donc bien réellement une courbe du second degré complétement déterminée par l'équation de la surface et celle du plan tangent qui, dans l'hypothèse où l'on prend le point (x, y, z) pour origine, en posant $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, se

réduit à

$$\xi \frac{du}{dx} + \eta \frac{du}{dy} + \zeta \frac{du}{dz} = 0,$$

ou, en appelant λ, μ, ν les angles que la normale à la surface fait avec les axes,

$$\xi \cos\lambda + \eta \cos\mu + \zeta \cos\nu = 0.$$

Les équations de cette ligne se réduiraient encore à une forme plus simple si l'on prenait pour plan $\overline{xy}$ le plan tangent mené par le point (x, y, z); alors, en effet, on aurait $\zeta = 0$, et l'équation de la courbe dans son plan serait

$$\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{du^2}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = \pm R.$$

On voit alors clairement que cette courbe sera une ellipse si la différence $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \times \frac{d^2u}{dy^2}$ est négative; deux hyperboles conjuguées si cette différence devient positive; deux droites parallèles, si la même différence se réduit à zéro.

Ajoutons que l'ellipse se transformera en cercle si l'on a

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0,$$

et se réduira à un point, si l'on a de plus $R = 0$. Comme on peut d'ailleurs choisir arbitrairement le plan $\overline{xy}$, le raisonnement qu'on vient de faire, est évidemment applicable à tous les points de la surface proposée.

188. Pour chaque section normale, les coordonnées ξ, η du point situé sur la tangente à l'extrémité de la lon-

gueur $\rho^{\frac{1}{2}}$ vérifient toujours une seule des deux équations

$$\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = \mathrm{R},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = -\mathrm{R}.$$

Si dans le passage d'une section normale à une autre, le premier membre de ces équations change de signe, on devra employer tour à tour ces deux équations, qui correspondent, la première à l'équation $\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$, la seconde à l'équation $\frac{1}{\rho} = -\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$. Alors aussi nécessairement les rayons de courbure de ces deux sections normales seront dirigés en sens contraire : au reste ce premier membre ne peut changer de signe que dans le cas où la différence

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\times\frac{d^2u}{dy^2}$$

est positive, c'est-à-dire dans le cas où la courbe est formée du système de deux hyperboles conjuguées, ou de deux hyperboles, dont l'une a pour axe réel l'axe imaginaire de l'autre, et réciproquement. Dans ce cas le plan tangent à la surface donnée divise cette surface en deux parties dont l'une renferme les sections normales dont le rayon de courbure se dirige dans un sens, tandis que l'autre comprend les sections normales dont le rayon de courbure est dirigé en sens inverse. Au contraire, lorsque la courbe est une ellipse, toutes les sections normales ont leur courbure tournée dans le même sens, ce qui suppose que la surface courbe est située tout entière d'un même côté du plan tangent.

Puisqu'il existe des relations nécessaires entre les rayons vecteurs relatifs à certaines lignes du second degré et les rayons de courbure des diverses sections nor-

males, toute propriété de ces rayons vecteurs, toute relation qui les fait dépendre les uns des autres, entraînera nécessairement une propriété correspondante des rayons de courbure et établira entre eux des relations plus ou moins importantes, qui, dans un grand nombre de cas, permettront de les déduire les uns des autres.

Ainsi, puisque dans une courbe du second degré il y a, en général, deux rayons vecteurs principaux, dont chacun est un maximum, ou un minimum, il y aura aussi pour les surfaces deux rayons de courbure principaux maxima ou minima. Nous nommerons sections principales les deux sections normales auxquelles correspondent ces deux rayons de courbure. Les deux rayons vecteurs principaux étant perpendiculaires l'un à l'autre, les plans des sections principales se couperont aussi à angle droit et les rayons de courbure principaux seront dirigés dans le même sens, ou en sens contraire, suivant que la courbe, lieu des extrémités des rayons vecteurs, sera une ellipse ou la réunion de deux hyperboles conjuguées. Ces rayons de courbure représenteront dans le premier cas un maximum et un minimum; dans le second deux minima. En d'autres termes, si la courbe du second degré est une ellipse, ces sections principales seront des sections normales de plus grande et de moindre courbure; mais si cette courbe est l'ensemble de deux hyperboles, les sections principales seront l'une et l'autre des sections normales de plus grande courbure, seulement, leurs courbures seront dirigées en sens contraires : dans la même hypothèse, les sections normales dont les plans renfermeront les asymptotes communes aux deux hyperboles, auront évidemment des courbures nulles, ou des rayons de courbure infinis; donc les plans des deux sections normales dont les courbures s'évanouiront formeront des angles égaux avec les plans des sections principales.

Si l'ellipse se change en un cercle, tous les rayons de courbure seront égaux : on pourra alors désigner par le nom de sections principales deux sections normales quelconques dont les plans se couperont à angle droit. Si la ligne, lieu des extrémités, se compose de deux droites parallèles, que l'on peut considérer comme représentant une ellipse dont le grand axe est infini, les sections principales correspondront à une valeur minimum et à une valeur infinie du rayon de courbure. Enfin, si la quantité R s'évanouissait, toutes les sections normales auraient des rayons de courbure nuls ou infinis.

On sait encore que si dans une ellipse ou dans l'ensemble de deux hyperboles conjuguées on mène deux rayons r', r'' perpendiculaires l'un à l'autre, la somme $\frac{1}{r'^2} \pm \frac{1}{r''^2}$ sera une quantité constante égale, au signe près, à $\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}$, a et b étant les deux axes principaux des courbes. Donc, en appelant ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure principaux, ρ', ρ'' les rayons correspondants aux rayons vecteurs r' et r'', l'équation

$$\frac{1}{r'^2} \pm \frac{1}{r''^2} = \pm\left(\frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}\right)$$

entraînera nécessairement la suivante

$$\frac{1}{\rho'} \pm \frac{1}{\rho''} = \pm\left(\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Donc, si après avoir mené, par un point (x, y, z) d'une surface courbe, deux plans rectangulaires entre eux et normaux à cette surface, on divise successivement l'unité par chacun des rayons de courbure des deux lignes d'intersection, la somme des quotients sera une quantité constante, pourvu que dans cette somme on prenne toujours le signe + pour les rayons de courbure

dirigés dans un certain sens, et le signe — pour ceux qui sont dirigés en sens inverse. La somme dont il s'agit sera égale, au signe près, à la somme ou à la différence des quotients que l'on obtient en divisant l'unité par les rayons de courbure principaux.

189. Si l'on suppose la courbe du second degré rapportée à ses axes principaux, son équation doit se réduire à

$$\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 = \pm R,$$

et l'on aura en conséquence

$$\frac{d^2u}{dxdy} = 0.$$

De plus, si l'on appelle α, β les angles qu'un rayon vecteur quelconque r fait avec les axes principaux, ce rayon vecteur partant du centre se trouve déterminé, si la courbe est une ellipse, par l'équation

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{b^2}\cos^2\beta = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{b^2}\sin^2\alpha,$$

et si la courbe est une hyperbole, par l'équation

$$\pm\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha - \frac{1}{b^2}\cos^2\beta = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha - \frac{1}{b^2}\sin^2\alpha;$$

on aura donc aussi, en ayant égard aux équations

$$r = \sqrt{\rho}, \quad a = \sqrt{\rho_1}, \quad b = \sqrt{\rho_2},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha,$$

ou

$$\pm\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha - \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha.$$

On arriverait directement à ces équations de la manière suivante. Quand on prend pour plan $\overline{xy}$ le plan tangent

à la surface, et pour axes dans ce plan les axes principaux, on a

$$\cos\gamma = 0, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0,$$

et la valeur de Q se réduit à

$$Q = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2\beta = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\sin^2\alpha.$$

Si, dans cette dernière équation, on met à la place de Q sa valeur $\pm\frac{R}{\rho}$, il vient

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{1}{R}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\sin^2\alpha\right);$$

et comme pour obtenir les rayons de courbure principaux ρ_1, ρ_2, il faut poser successivement

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

on trouvera

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm\frac{1}{R}\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \pm\frac{1}{R}\frac{d^2u}{dy^2},$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha \pm \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha.$$

Les quantités $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ étant nécessairement des quantités de même signe dans le cas où la courbe est une ellipse, de signes contraires quand elle est formée de deux hyperboles conjugées, on en conclut que la dernière des équations qui précèdent se réduit, dans le premier cas,

à la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha,$$

et dans le second, à

$$\pm\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha - \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha.$$

Il existe donc une relation très simple entre le rayon de courbure d'une section normale quelconque et les deux rayons de courbure des sections principales, relation qui permet de calculer facilement ce rayon de courbure quelconque quand on connaît les rayons de courbure principaux, et les angles que la tangente à la section normale fait avec les tangentes aux deux sections principales.

Si la courbe devenait un cercle, on aurait

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho.$$

Si cette ligne était formée de deux droites parallèles, l'un des deux rayons de courbure principaux, ρ_2 par exemple, serait infini; $\frac{1}{\rho_2}$ serait nul, et ρ serait donné par l'équation très simple

$$\rho = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha,$$

$$\rho\rho_1 = \cos^2\alpha;$$

ρ_1 serait d'ailleurs le rayon de courbure de la section normale qui aurait pour tangente la perpendiculaire menée aux deux parallèles par le point (x, y, z).

Concevons que le rayon de courbure ρ étant donné par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha \pm \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha,$$

on considère un second rayon de courbure ρ' correspondant à l'angle $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$, on aurait

$$\frac{1}{\rho'} = \pm \frac{1}{\rho_1} \sin^2 \alpha \pm \frac{1}{\rho_2} \cos^2 \alpha,$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \pm \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2},$$

équation qui renferme le théorème énoncé plus haut.



TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

Détermination analytique des sections de courbure principales et des rayons de courbure principaux. — Rayon de courbure ou d'une courbe quelconque tracée sur la surface.

---

190. Concevons à présent que l'on veuille déterminer dans l'espace, pour un point quelconque (x, y, z) de la surface donnée, la direction des tangentes aux sections de courbure principales, et les rayons de courbure principaux. Il suffira évidemment de chercher le maximum et le minimum, ou les deux minima du rayon de courbure

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

en supposant les coordonnées ξ, η, ζ liées entre elles par les deux équations

$$\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 + \frac{d^2u}{dz^2}\zeta^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}\eta\xi + 2\frac{d^2u}{dxdz}\xi\zeta + 2\frac{d^2u}{dydz}\eta\zeta = \pm R,$$

$$\xi\frac{du}{dx} + \eta\frac{du}{dy} + \zeta\frac{du}{dz} = 0.$$

Par suite on reconnaîtra que les valeurs de ξ, η, ζ correspondantes aux rayons de courbure principaux, devront satisfaire à l'équation

$$d\rho = 0, \quad \text{ou} \quad \xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0,$$

après qu'on aura éliminé $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ à l'aide des différentielles des deux équations qui lient entre elles ces variables, différentielles qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\xi+\frac{d^2u}{dxdy}\eta+\frac{d^2u}{dxdz}\zeta\right)d\xi+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\xi+\frac{d^2u}{dy^2}\eta+\frac{d^2u}{dydz}\zeta\right)d\eta$$
$$+\left(\frac{d^2u}{dxdz}\xi+\frac{d^2u}{dydz}\eta+\frac{d^2u}{dz^2}\zeta\right)d\zeta=0,$$
$$\frac{du}{dx}d\xi+\frac{du}{dy}d\eta+\frac{du}{dz}d\zeta=0.$$

Pour faire cette élimination, multiplions la première de ces deux équations par un coefficient indéterminé — S, la seconde par un coefficient indéterminé — T, et après les avoir ajoutées à l'équation

$$\xi d\xi+\eta d\eta+\zeta d\zeta=0,$$

égalons à o les coefficients des différentielles $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. On trouve de cette manière

$$\frac{d^2u}{dx^2}\xi+\frac{d^2u}{dxdy}\eta+\frac{d^2u}{dxdz}\zeta=\mathrm{S}\xi+\mathrm{T}\frac{du}{dx},$$
$$\frac{d^2u}{dxdy}\xi+\frac{d^2u}{dy^2}\eta+\frac{d^2u}{dydz}\zeta=\mathrm{S}\eta+\mathrm{T}\frac{du}{dy},$$
$$\frac{d^2u}{dxdz}\xi+\frac{d^2u}{dydz}\eta+\frac{d^2u}{dz^2}\zeta=\mathrm{S}\zeta+\mathrm{T}\frac{du}{dz}.$$

Si l'on ajoute ces dernières équations après les avoir respectivement multipliées par ξ, η, ζ, on trouvera, en ayant égard aux équations qui précèdent,

$$\pm\mathrm{R}=\mathrm{S}\rho,\quad \mathrm{S}=\pm\frac{\mathrm{R}}{\rho}=\mathrm{Q}.$$

Le facteur S ne diffère donc pas de la quantité déjà désignée par Q. Si l'on substitue pour S cette valeur Q, il

viendra

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\xi+\frac{d^2u}{dxdy}\eta+\frac{d^2u}{dxdz}\zeta=T\frac{du}{dx},\\&\frac{d^2u}{dxdy}\xi+\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\eta+\frac{d^2u}{dydz}\zeta=T\frac{du}{dy},\\&\frac{d^2u}{dxdz}\xi+\frac{d^2u}{dydz}\eta+\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\zeta=T\frac{du}{dz};\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tirera

$$\xi=\theta\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dx}\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2\right]\\+&\frac{du}{dy}\left[\frac{d^2u}{dzdx}\frac{d^2u}{dydz}-\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dxdy}\right]\\+&\frac{du}{dz}\left[\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdy}-\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dzdx}\right]\end{aligned}\right\}=\theta\xi_1,$$

$$\eta=\theta\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dzdx}\frac{d^2u}{dydz}-\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dxdy}\right]\\+&\frac{du}{dy}\left[\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)^2\right]\\+&\frac{du}{dz}\left[\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dzdx}-\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dydz}\right]\end{aligned}\right\}=\theta\eta_1,$$

$$\zeta=\theta\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdy}-\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dzdx}\right]\\+&\frac{du}{dy}\left[\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dzdx}-\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\frac{d^2u}{dydz}\right]\\+&\frac{du}{dz}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}=\theta\zeta_1,$$

θ désignant un coefficient dont on déterminera facilement la valeur. En effet, si l'on substitue les valeurs de ξ, η, ζ, dans les deux équations

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2,\quad \xi\frac{du}{dx}+\eta\frac{du}{dy}+\zeta\frac{du}{dz}=0,$$

on trouvera, 1°

$$\theta=\pm\frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{U},$$

U^2 désignant la somme des carrés des coefficients de θ

dans les valeurs de ξ, η, ζ; 2°

$$(A)\quad 0 = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du}{dx}\right)^2\left[\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)^2\right] \\ +\left(\frac{du}{dy}\right)^2\left[\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)^2\right] \\ +\left(\frac{du}{dz}\right)^2\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)-\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right] \\ +2\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}\left[\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dzdx}-\frac{d^2u}{dydz}\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)\right] \\ +2\frac{du}{dz}\frac{du}{dx}\left[\frac{d^2u}{dydz}\frac{d^2u}{dxdy}-\frac{d^2u}{dzdx}\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)\right] \\ +2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\left[\frac{d^2u}{dzdx}\frac{d^2u}{dydz}-\frac{d^2u}{dxdy}\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)\right]. \end{array}\right.$$

Cette dernière équation du deuxième degré, par rapport à Q, donnera les deux valeurs de cette inconnue correspondantes aux rayons de courbure principaux. Ces rayons de courbure principaux seront ensuite donnés immédiatement par l'équation

$$\rho = \pm \frac{R}{Q}.$$

Connaissant Q et ρ, on pourra calculer $\varkappa$, puis ξ, η, ζ, ou les coordonnées des deux points situés sur les tangentes aux sections principales; et enfin les cosinus des angles que ces tangentes font avec les axes, à l'aide des équations

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\rho^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos\beta = \frac{\eta}{\rho^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos\gamma = \frac{\zeta}{\rho^{\frac{1}{2}}},$$

ou, à cause de $\varkappa = \pm \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{U}$, $\rho^{\frac{1}{2}} = \pm U\varkappa$,

$$\cos\alpha = \pm\frac{\xi_1}{U}, \quad \cos\beta = \pm\frac{\eta_1}{U}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{\zeta_1}{U}.$$

ξ_1, η_1, ζ_1 ne dépendent pas de $\varkappa$, mais seulement de Q et des quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, etc.

Remarquons que l'on peut calculer T quand on connaît s, et que, par conséquent, le problème précédent est complétement déterminé.

191. Lorsque les variables x, y, z, sont séparées dans l'équation $u = 0$ de la surface, on a

$$\frac{d^2u}{dydz} = 0, \quad \frac{d^2u}{dzdx} = 0, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0,$$

les équations qui donnent ξ, η, ζ et Q, deviennent

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2} - Q\right)\xi = T\frac{du}{dx}, \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2} - Q\right)\eta = T\frac{du}{dy},$$
$$\left(\frac{d^2u}{dz^2} - Q\right)\zeta = T\frac{du}{dz};$$
$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\frac{d^2u}{dx^2} - Q} + \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2} - Q} + \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^2}{\frac{d^2u}{dz^2} - Q} = 0.$$

Dans la même hypothèse, la quantité T et les trois angles α, β, γ seront déterminés par les équations

$$\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2} - Q\right)\cos\alpha}{\frac{du}{dx}} = \frac{\left(\frac{d^2u}{dy^2} - Q\right)\cos\beta}{\frac{du}{dy}} = \frac{\left(\frac{d^2u}{dz^2} - Q\right)\cos\gamma}{\frac{du}{dz}}$$
$$= \mp\left[\left(\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{d^2u}{dx^2} - Q}\right)^2 + \left(\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2} - Q}\right)^2 + \left(\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{d^2u}{dz^2} - Q}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$
$$T = \pm\rho^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{d^2u}{dx^2} - Q}\right)^2 + \left(\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2} - Q}\right)^2 + \left(\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{d^2u}{dz^2} - Q}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Prenons pour premier exemple l'ellipsoïde

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1:$$

on peut faire

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right),$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{a^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{y}{b^2}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{z}{c^2},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{c^2},$$

et l'on aura

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2(1 - Qa^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - Qb^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - Qc^2)} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} = \pm\, Q\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1 - Qa^2}{x}\cos\alpha = \frac{1 - Qb^2}{y}\cos6 = \frac{1 - Qc^2}{z}\cos\gamma$$
$$= \pm\left[\left(\frac{x}{1 - Qa^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1 - Qb^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{1 - Qc^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

A l'aide de ces dernières équations on déterminera en chaque point de l'ellipsoïde la direction des tangentes aux sections principales, et les deux rayons de courbure principaux.

De plus, si l'on retranche l'une de l'autre les deux équations (1) et (2), on trouvera

$$\frac{x^2}{a^2 - \frac{1}{Q}} + \frac{y^2}{b^2 - \frac{1}{Q}} + \frac{z^2}{c^2 - \frac{1}{Q}} = 1;$$

d'où il résulte que si après avoir calculé l'une des valeurs maximum ou minimum de Q, on construit un nouvel ellipsoïde, dont les demi-axes a', b', c', soient déterminés par les équations

$$a'^2 = a^2 - \frac{1}{Q}, \quad b'^2 = b^2 - \frac{1}{Q}, \quad c'^2 = c^2 - \frac{1}{Q};$$

le nouvel ellipsoïde passera encore par le point (x, y, z).

On peut remarquer que les sections faites par les plans coordonnés dans l'ellipsoïde proposé, et dans ce nouvel ellipsoïde, ont les mêmes foyers; car on a

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \quad a'^2 - c'^2 = a^2 - c^2, \quad b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2.$$

2[me] *Exemple.* Concevons qu'après avoir tracé dans le plan $\overline{xy}$ une courbe représentée par $y = f(x)$, on fasse tourner cette courbe autour de l'axe des x; elle engendrera une surface de révolution dans laquelle la distance du point (x, y, z) à l'axe des x, savoir, $\sqrt{y^2 + z^2}$, sera équivalente, au signe près, à l'ordonnée $f(x)$ de la courbe génératrice. On aura donc pour tous les points de la surface

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \pm f(x), \quad y^2 + z^2 = [f(x)]^2;$$

et son équation pourra se mettre sous la forme

$$u = \tfrac{1}{2}\left\{y^2 + z^2 - [f(x)]^2\right\} = 0;$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = -f(x)f'(x), \quad \frac{du}{dy} = y, \quad \frac{du}{dz} = z;$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\left\{[f'(x)]^2 + f(x)f''(x)\right\}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 1, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = 1.$$

L'équation qui donne la valeur de Q sera

$$\frac{[f(x)f'(x)]^2}{Q + [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)} + \frac{y^2 + z^2}{Q - 1} = 0;$$

d'où, en remettant pour $y^2 + z^2$ sa valeur $[f(x)]^2$,

$$Q = -\frac{f(x)f''(x)}{1 + [f'(x)]^2}.$$

On aura d'ailleurs

$$R = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \pm f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{\{1 + [f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

La valeur précédente de ρ est le rayon de courbure de la courbe génératrice qui coïncide effectivement avec l'une des sections principales de la surface de révolution. L'équation qui donnait Q s'est trouvée réduite dans ce cas particulier au premier degré, de sorte que, pour déterminer le second rayon de courbure principal, il faut remonter aux équations qui lient ξ, η, ζ avec Q et T, équations qui deviennent

$$\{Q + [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)\}\xi = \mathrm{T}f(x)f'(x),$$
$$(1 - Q)\eta = \mathrm{T}y, \quad (1 - Q)\zeta = \mathrm{T}z,$$

et que l'on vérifie en prenant $Q = 1$, $T = 0$, $\xi = 0$.

En donnant cette seconde valeur à Q, on trouvera pour la valeur correspondante de ρ

$$\rho = \pm R = \pm f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = N,$$

N étant la normale de la génératrice.

De plus, l'équation $\xi = 0$ entraînera la suivante $\cos\alpha = 0$, de sorte que la section principale, dont N est le rayon de courbure, a pour tangente une droite comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe des x.

192. Les formules générales précédemment obtenues se simplifient lorsque l'on suppose l'équation de la surface résolue par rapport à z, et réduite à la forme $z = f(x, y)$; alors, en posant

$$u = f(x, y) - z, \quad \frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

on trouvera

$$\frac{du}{dx}=p,\quad \frac{du}{dy}=q,\quad \frac{du}{dz}=-1,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=t,\quad \frac{d^2u}{dz^2}=0,\quad \frac{d^2u}{dydz}=0,$$

$$\frac{d^2u}{dzdx}=0,\quad \frac{d^2u}{dxdy}=s,\quad R=\sqrt{p^2+q^2+1},$$

$$Q=r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos6+t\cos^2 6,$$

$$p\cos\alpha+q\cos6=\cos\gamma;$$

et les deux équations de la courbe plane qu'on obtient en portant, à partir du point (x, y, z), sur la tangente à chaque section normale, des longueurs égales à la racine carrée du rayon de courbure de cette même section, seront

$$p\xi+q\eta=\zeta,\quad r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=\pm R.$$

Les rayons de courbure principaux sont toujours déterminés par la formule

$$d\rho=\xi\,d\xi+\eta\,d\eta+\zeta\,d\zeta=0,$$

de laquelle on devra éliminer $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, à l'aide des équations différentielles

$$(r\xi+s\eta)\,d\xi+(s\xi+t\eta)\,d\eta=0,\quad p\,d\xi+q\,d\eta=d\zeta;$$

or, si l'on élimine d'abord $d\zeta$, on aura

$$(\xi+p\zeta)\,d\xi+(\eta+q\zeta)\,d\eta=0,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{r\xi+s\eta}{\xi+p\zeta}=\frac{s\xi+t\eta}{\eta+q\zeta}=\frac{\xi(r\xi+s\eta)+\eta(s\xi+t\eta)}{\xi(\xi+p\zeta)+\eta(\eta+q\zeta)}$$

$$=\frac{r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta(p\xi+q\eta)}=\frac{\pm R}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\frac{\pm R}{\rho}=Q,$$

et par suite

$$r\xi + s\eta - (\xi + p\zeta)Q = 0, \quad s\xi + t\eta - (\eta + q\zeta)Q = 0,$$

ou, mettant pour ζ sa valeur $p\xi + q\eta$,

$$[r - (p^2 + 1)Q]\xi + (s - pqQ)\eta = 0,$$
$$(s - pqQ)\xi + [t - (q^2 + 1)Q]\eta = 0,$$
$$[r - (p^2 + 1)Q][t - (q^2 + 1)Q] - (s - pqQ)^2 = 0,$$
$$Q^2(p^2 + q^2 + 1) - [(p^2 + 1)t - 2pqs + (q^2 + 1)r]Q + rt - s^2 = 0.$$

On trouvera encore

$$\rho = \pm \frac{Q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\frac{\xi}{s - pqQ} = \frac{\eta}{(p^2 + 1)Q - r} = \frac{p\xi + q\eta}{ps - qr + qQ} = \frac{\zeta}{ps - qr + qQ}$$

$$= \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(s - pqQ)^2 + [(p^2 + 1)Q - r]^2 + (ps - qr + qQ)^2}}$$

$$= \frac{\rho^{\frac{1}{2}}\sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{[(p^2 + 1)s - pqr]^2 + (p^2 + q^2 + 1)[(p^2 + 1)Q - r]^2}}.$$

On tirera enfin des formules qui précèdent

$$\frac{\cos\alpha}{s - pqQ} = \frac{\cos\beta}{(p^2 + 1)Q - r} = \frac{\cos\gamma}{ps - qr + qQ}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{[(p^2 + 1)s - pqr]^2 + (p^2 + q^2 + 1)[(p^2 + 1)Q - r]^2}}.$$

L'équation

$$(p^2 + q^2 + 1)Q^2 - [(p^2 + 1)t - 2pqs + (q^2 + 1)r]Q + rt - s^2$$
$$= AQ^2 + BQ + C = 0$$

donnera évidemment deux valeurs réelles de Q. On aura en effet

$$B^2 - 4AC = \{(p^2 + 1)t - 2pqs + (q^2 + 1)r\}^2 - 4(p^2 + q^2 + 1)(rt - s^2)$$
$$= \frac{\{(p^2 + 1)[(p^2 + 1)t - (q^2 + 1)r] + 2pq[pqr - (p^2 + 1)s]\}^2 + 4(p^2 + q^2 + 1)[pqr - (p^2 + 1)s]^2}{(p^2 + 1)^2}.$$

193. Quand on connaîtra les deux valeurs Q' et Q'' de

Q, on déterminera facilement et les deux rayons de courbure principaux, et les directions des tangentes menées par le point (x, y, z) aux sections principales.

Comme le produit Q′Q″ de ces deux racines est égal à $rt - s^2$, elles seront de même signe si l'on a $rt - s^2 > 0$, et les deux rayons de courbure dirigés dans le même sens seront les valeurs maximum et minimum du rayon de courbure ρ. Si l'on avait $rt - s^2 < 0$, les deux racines de l'équation seraient des quantités de signes contraires, et les rayons de courbure dirigés en sens contraire représenteraient deux valeurs minima de ρ. Si l'on avait $rt - s^2 = 0$, l'une des racines s'évanouirait, et la valeur maximum de ρ deviendrait infinie : donc alors une des sections principales aurait une courbure nulle. Il est aisé de s'assurer que cette circonstance a lieu en chaque point d'une surface développable : par conséquent les valeurs de r, t, s, tirées de l'équation d'une semblable surface, vérifient la formule $rt - s^2 = 0$, quelles que soient les valeurs attribuées aux coordonnées x, y, z.

Les deux valeurs Q′ et Q″ deviennent égales dans le cas où $B^2 - 4AC = 0$, ce qui ne peut arriver sans que les deux carrés dont se compose cette différence soient séparément nuls, ou sans que l'on ait à la fois

$$pqr - (p^2 + 1)s = 0, \quad (p^2 + 1)t - (q^2 + 1)r = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{r}{p^2 + 1} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{q^2 + 1} = \frac{1}{k}.$$

Or dans cette supposition, l'équation qui donne Q, c'est-à-dire

$$[r - (p^2 + 1)Q][t - (q^2 + 1)Q] - (s - pqQ)^2 = 0,$$

devient

$$(r - kQr)(t - kQt) - (s - kQs)^2 = 0,$$
$$(1 - kQ)^2 (rt - s^2) = 0,$$

d'où l'on tire, en remarquant que dans le cas dont il s'agit $rt - s^2$ n'est pas nul,

$$Q = \frac{1}{k} = \frac{r}{p^2 + 1} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{q^2 + 1}.$$

Donc alors la valeur de Q, et par conséquent celle de ρ, est indépendante des angles, α, β, γ, ou des coordonnées ξ, η, ζ.

Et en effet, l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\alpha$$

se réduit, à cause de $\rho_1 = \rho_2$, à

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{1}{\rho_1}.$$

On trouverait aussi que dans ce cas les valeurs des coordonnées ξ, η, ζ, ou des angles α, β, γ qui correspondent aux rayons de courbure principaux, sont indéterminées.

Les points de la surface pour lesquels toutes les sections normales ont la même courbure s'appellent des ombilics.

Pour que les rayons de courbure principaux soient égaux et dirigés en sens contraires, il est nécessaire que dans l'équation $AQ^2 + BQ + C = 0$ le coefficient de Q s'évanouisse, et que l'on ait en conséquence

$$(p^2 + 1)t - 2pqs + (q^2 + 1)r = 0.$$

Remarque. On démontrerait plus simplement la réalité des racines Q′ et Q″, en supposant, ce qui est toujours permis, que l'on a pris pour plan $\overline{xy}$ un plan parallèle au

plan tangent mené par le point (x, y, z). On aurait en effet, dans cette supposition,

$$p = 0, \quad q = 0;$$

l'équation qui donne Q deviendrait

$$(r - Q)(t - Q) - s^2 = 0,$$

d'où

$$Q^2 - (t + r)Q + rt - s^2 = 0,$$

$$Q = \frac{t+r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t+r}{2}\right)^2 - rt + s^2} = \frac{t+r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t-r}{2}\right)^2 + s^2};$$

la quantité sous le radical est essentiellement positive, donc, etc.

194. Considérons toujours une surface courbe représentée par l'équation $u = 0$, et sur cette surface une courbe quelconque passant par le point (x, y, z). Si l'on nomme s l'arc de cette courbe pris pour variable indépendante, et ρ son rayon de courbure correspondant au point (x, y, z), les cosinus des angles formés par ce rayon avec les demi-axes des coordonnées positives, seront (n° 166)

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \rho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Si de plus on mène la normale à la surface en ce même point, et si l'on fait, pour abréger,

$$R = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2},$$

les cosinus des angles compris entre la normale et les demi-axes des coordonnées positives, seront respectivement

$$\frac{1}{R}\frac{du}{dx}, \quad \frac{1}{R}\frac{du}{dy}, \quad \frac{1}{R}\frac{du}{dz}.$$

Cela posé, soit δ l'angle que fait la normale avec le rayon

de courbure, on aura

$$\cos\delta = \frac{\text{P}}{\text{R}} \frac{\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z}{ds^2}.$$

D'ailleurs en différentiant deux fois de suite l'équation $u = 0$, et désignant par α, 6, γ, les angles que forme la tangente prolongée dans un sens ou dans un autre avec les demi-axes des coordonnées positives, on en tirera, comme nous l'avons déjà vu,

$$\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y + \frac{du}{dz}d^2z = -\text{Q}ds^2,$$

la valeur de Q étant déterminée par l'équation

$$\text{Q} = \frac{d^2u}{dx^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2u}{dy^2}\cos^2 6 + \frac{d^2u}{dz^2}\cos^2\gamma$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dydz}\cos 6\cos\gamma + 2\frac{d^2u}{dzdx}\cos\gamma\cos\alpha + 2\frac{d^2u}{dxdy}\cos\alpha\cos 6,$$

et l'on aura par conséquent

$$\cos\delta = \frac{\text{P}}{\text{R}}\text{Q}, \quad \frac{\cos\delta}{\text{P}} = -\frac{\text{Q}}{\text{R}}, \quad \text{P} = -\frac{\text{R}}{\text{Q}}\cos\delta.$$

Des trois quantités R, Q et δ, la première R dépend uniquement de la position du point (x, y, z) sur la surface; la seconde Q dépend à la fois et de cette position, et de la direction de la tangente à la courbe tracée sur la surface; δ représente toujours l'un des angles formés par le plan osculateur de la courbe avec le plan tangent, ou, ce qui revient au même, par la normale principale de la courbe, avec la normale à la surface. Cela posé, il est clair que si l'on donne avec le point (x, y, z), la tangente à la courbe, et le plan osculateur, ces quantités Q et R seront connues, ainsi que $\cos\delta$; on pourra donc déterminer le rayon de courbure à l'aide de l'équation $\text{P} = -\frac{\text{R}}{\text{Q}}\cos\delta$. De plus,

comme les quantités P et R sont essentiellement positives, $\cos\delta$ et Q devront être de signes contraires; et comme on connaît le signe de Q, on pourra dans tous les cas déterminer le signe de $\cos\delta$, et, par conséquent, le sens dans lequel on devra porter le rayon de courbure P sur la normale principale de la courbe proposée.

195. Si l'on voulait avoir le rayon de courbure ρ de la section normale, il faudrait faire coïncider le plan osculateur de la courbe avec un plan normal, en posant $\cos\delta = \pm 1$. On trouverait ainsi $\rho = \mp \frac{R}{Q}$, valeur qui s'accorde avec celle que nous avons obtenue plus haut; en substituant, au lieu de $\frac{R}{Q}$, sa valeur $\pm\rho$, on aura $P = \pm\rho\cos\delta$. On conclut facilement de cette dernière équation le théorème suivant :

Concevons qu'une courbe quelconque étant tracée sur une surface, on mène par la tangente à cette courbe en un point donné (x, y, z), un plan normal à la surface; le rayon de courbure de la courbe sera le produit du rayon de courbure de la section faite par le plan normal par le cosinus de l'angle aigu compris entre ce même plan et le plan osculateur de la courbe.

Ce théorème remarquable, dû à Meunier, peut, en ne considérant que des sections planes, s'énoncer aussi comme il suit : le rayon de courbure d'une section oblique est la projection sur le plan de cette courbe du rayon de la section normale qui passe par la même tangente. En imaginant une sphère décrite de l'extrémité du rayon de courbure de la section normale prise pour centre, et avec ce même rayon, on pourrait dire encore que tout plan conduit par la tangente coupera cette sphère suivant un cercle qui sera le cercle osculateur de la section faite dans la surface par ce même plan.

On peut aisément vérifier le théorème qui précède dans plusieurs cas particuliers. Ainsi, par exemple, si par un point donné sur une sphère, on fait passer un grand cercle et un petit cercle qui aient en ce point la même tangente, on reconnaîtra sans peine que le rayon du petit cercle est équivalent au rayon de la sphère multiplié par le cosinus de l'angle aigu compris entre les plans des deux cercles.

Supposons encore que la surface courbe est la surface de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe $y=f(x)$, et que l'on demande le rayon de courbure P de la section faite dans la surface par un plan normal à la courbe génératrice, et passant par le point (x, y, z). L'angle aigu compris entre ce plan et un second plan perpendiculaire à l'axe des x, sera évidemment égal à l'inclinaison τ de la courbe génératrice par rapport au même axe. Ce second plan coupera la surface de révolution suivant un cercle dont le rayon P est égal au signe près à l'ordonnée $f(x)$ de la courbe génératrice. On aura donc, en appelant toujours ρ le rayon de courbure de la section normale, et parce que

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}, \quad \rho\cos\tau = P = \pm f(x),$$

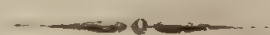
$$\rho = \pm f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

Les équations qui précèdent se simplifient considérablement dans le cas où l'équation de la surface $u = 0$ est de la forme $z - f(x, y) = 0$; on trouve en effet alors

$$R = \sqrt{p^2+q^2+1},$$

$$Q = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos6 + t\cos^2 6,$$

$$\frac{\cos\delta}{P} = -\frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos6 + t\cos^2 6}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$



TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

Nouvelles propriétés des sections principales. — Lignes de courbure des surfaces. — Centres de courbure. — Surface lieu des centres de courbure.

---

196. Si dans les équations (a) (n° 189) on met à la place de ξ, η, ζ, leurs valeurs tirées des équations

$$\xi = \rho^{\frac{1}{2}} \cos\alpha = \rho^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{ds},\quad \eta = \rho^{\frac{1}{2}} \cos 6 = \rho^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{ds},\quad \zeta = \rho^{\frac{1}{2}} \cos\gamma = \rho^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{ds},$$

on trouvera, en posant $\dfrac{\mathrm{T}}{\rho^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{T}'$,

$$(b)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2x}{dx^2} - \mathrm{Q}\right)\frac{dx}{ds} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2u}{dxdz}\frac{dz}{ds} = \mathrm{T}'\frac{du}{dx},\\
&\frac{d^2u}{dxdy}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{d^2u}{dy^2} - \mathrm{Q}\right)\frac{dy}{ds} + \frac{d^2u}{dydz}\frac{dz}{ds} = \mathrm{T}'\frac{du}{dy},\\
&\frac{d^2u}{dxdz}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2u}{dydz}\frac{dy}{ds} + \left(\frac{d^2u}{dz^2} - \mathrm{Q}\right)\frac{dz}{ds} = \mathrm{T}'\frac{du}{dz}.
\end{aligned}\right.$$

Appelons l, m, n les angles que fait avec les axes la perpendiculaire au plan osculateur de la section normale, cette ligne sera nécessairement perpendiculaire à la tangente à la section normale et à la normale à la surface, et l'on aura

$$\cos l\, dx + \cos m\, dy + \cos n\, dz = 0,$$
$$\cos l \frac{du}{dx} + \cos m \frac{du}{dy} + \cos n \frac{du}{dz} = 0.$$

Cela posé, si après avoir multiplié respectivement les équations (b) par $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, on les ajoute, Q et T' disparaîtront, et l'on trouvera

$$\cos l\left(\frac{d^2u}{dx^2}dx+\frac{d^2u}{dxdy}dy+\frac{d^2u}{dxdz}dz\right)$$
$$+\cos m\left(\frac{d^2u}{dxdy}dx+\frac{d^2u}{dy^2}dy+\frac{d^2u}{dydz}dz\right)$$
$$+\cos n\left(\frac{d^2u}{dxdz}dx+\frac{d^2u}{dydz}dy+\frac{d^2u}{dz^2}dz\right)=0,$$

équation que l'on peut écrire sous la forme très simple

$$\cos l\, d.\frac{du}{dx}+\cos m\, d.\frac{du}{dy}+\cos n\, d.\frac{du}{dz}=0,$$

puisque l'on a identiquement

$$\frac{d^2u}{dx^2}dx+\frac{d^2u}{dxdy}dy+\frac{d^2u}{dxdz}dz=d.\frac{du}{dx},\ \ldots \text{etc.}$$

Les trois équations

$$\cos l d.\frac{du}{dx}+\cos m d.\frac{du}{dy}+\cos n d.\frac{du}{dz},$$
$$\cos l\frac{du}{dx}+\cos m\frac{du}{dy}+\cos n\frac{du}{dz}=0,$$
$$\cos^2 l+\cos^2 m+\cos^2 n=1,$$

suffisent pour déterminer, au signe près, les trois quantités $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, ou pour fixer la position du plan osculateur à la section normale dont le rayon de courbure est un maximum ou un minimum.

197. Supposons maintenant qu'ayant mené par le point (x, y, z) une section normale quelconque, on considère sur cette section un second point dont les coordonnées soient $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, menons par ce second point, ainsi que par le point (x, y, z), deux normales à la surface, et par l'une de ces normales faisons passer un plan parallèle à l'autre. Si l'on désigne par l', m', n' les

angles que forme avec les axes une perpendiculaire à ce plan, on aura tout-à-la-fois

$$\cos l' \frac{du}{dx} + \cos m' \frac{du}{dy} + \cos n' \frac{du}{dz} = 0,$$

$$\cos l' \left(\frac{du}{dx} + \Delta \frac{du}{dx}\right) + \cos m' \left(\frac{du}{dy} + \Delta \frac{du}{dy}\right) + \cos n' \left(\frac{du}{dz} + \Delta \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

et l'on en conclura

$$\cos l' \Delta \frac{du}{dx} + \cos m' \Delta \frac{du}{dy} + \cos n' \Delta \frac{du}{dz} = 0.$$

Si les deux normales deviennent infiniment voisines, cette dernière équation deviendra

$$\cos l' \, d.\frac{du}{dx} + \cos m' \, d.\frac{du}{dy} + \cos n' \, d.\frac{du}{dz} = 0.$$

Par conséquent pour tout plan parallèle à la normale menée par le point (x, y, z) et à une normale infiniment voisine menée par un second point de la courbe que l'on considère, les angles l', m', n' seront déterminés par les deux équations

$$\cos l' \frac{du}{dx} + \cos m' \frac{du}{dy} + \cos n' \frac{du}{dz} = 0,$$

$$\cos l' \, d.\frac{du}{dx} + \cos m' \, d.\frac{du}{dy} + \cos n' \, d.\frac{du}{dz} = 0.$$

Quand la section normale que l'on considère est une section de plus grande ou de moindre courbure, on a, comme nous venons de le voir, en désignant par l, m, n les angles que la perpendiculaire au plan osculateur ou au plan de cette courbe fait avec les axes,

$$\cos l \frac{du}{dx} + \cos m \frac{du}{dy} + \cos n \frac{du}{dz} = 0,$$

$$\cos l \, d.\frac{du}{dx} + \cos m \, d.\frac{du}{dy} + \cos n \, d.\frac{du}{dz} = 0.$$

On aura donc

$$\frac{\cos l'}{\cos l} = \frac{\cos m'}{\cos m} = \frac{\cos n'}{\cos n},$$

et par conséquent le plan normal qui renferme une section de plus grande ou de moindre courbure au point (x, y, z) renferme en même temps la normale à la surface menée par un second point de la section infiniment voisin du premier.

198. On appelle ligne de courbure d'une surface courbe, toute ligne qui, étant tracée sur cette surface, est tangente en ce point à une section normale de plus grande ou de moindre courbure. D'après cette définition, les valeurs des différentielles dx, dy, dz, ou plutôt des rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, correspondant aux lignes de courbure, doivent être celles qui répondent aux sections normales de plus grande et de moindre courbure; et, puisque ces valeurs se déduisent des deux équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,\\ &\cos l d.\frac{du}{dx} + \cos m d.\frac{du}{dy} + \cos n d.\frac{du}{dz} = 0,\end{aligned}\right.$$

il est clair que ces deux équations sont précisément les équations différentielles des deux systèmes de lignes de courbure. La dernière de ces équations peut, comme on l'a vu, se mettre sous la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos l\left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2u}{dxdz}\frac{dz}{ds}\right)\\ &+\cos m\left(\frac{d^2u}{dxdy}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2u}{dydz}\frac{dz}{ds}\right)\\ &+\cos n\left(\frac{d^2u}{dxdz}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2u}{dydz}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz}{ds}\right)\end{aligned}\right\} = 0.$$

D'ailleurs, des formules

$$\cos l \frac{dx}{ds} + \cos m \frac{dy}{ds} + \cos n \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\cos l \frac{du}{dz} + \cos m \frac{du}{dy} + \cos n \frac{du}{dx} = 0,$$

on tire

$$\frac{\cos l}{\frac{du}{dy}\frac{dz}{ds} - \frac{du}{dz}\frac{dy}{ds}} = \frac{\cos m}{\frac{du}{dz}\frac{dx}{ds} - \frac{du}{dx}\frac{dz}{ds}} = \frac{\cos n}{\frac{du}{dx}\frac{dy}{ds} - \frac{du}{dy}\frac{dx}{ds}}.$$

Si dans l'équation (2) on remplace les trois cosinus par les quantités proportionnelles $\frac{du}{dy}\frac{dz}{ds} - \frac{du}{dz}\frac{dy}{ds}$, etc., on obtiendra une équation du second degré entre les rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et en éliminant un de ces rapports à l'aide de l'équation

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

qui est du premier degré seulement, on aura, pour déterminer l'autre, une nouvelle équation du second degré, qui est ce qu'on appelle plus proprement l'équation différentielle des lignes de courbure.

Si dans l'équation de la surface les variables étaient séparées, on aurait

$$\frac{d^2u}{dydz} = 0, \quad \frac{d^2u}{dzdx} = 0, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0,$$

et les équations différentielles des lignes de courbure se réduiraient à

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

$$(3) \quad \frac{du}{dx}\left(\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{d^2u}{dz^2}\right)dydz + \frac{du}{dy}\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{d^2u}{dx^2}\right)dzdx + \frac{du}{dz}\left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2}\right)dxdy = 0.$$

Ainsi, par exemple, les lignes de courbure d'une ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes se trouveront déterminées par le système des deux équations différentielles

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0,$$

$$\frac{x}{a^2}(b^2 - c^2)\,dydz + \frac{y}{b^2}(c^2 - a^2)dxdz + \frac{z}{c^2}(a^2 - b^2)\,dx\,dy = 0.$$

La première de ces deux équations différentielles peut être remplacée par l'équation même de l'ellipsoïde.

Pour une surface de révolution on aurait (n° 191)

$$\frac{du}{dy} = y, \quad \frac{du}{dz} = z, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dz^2} = 1,$$

et, par suite, l'équation (3) se réduirait à

$$\left(1 - \frac{d^2u}{dx^2}\right) dx\,(ydz - zdy) = 0,$$

et l'on en conclura que les lignes de courbure ne sont autre chose que les sections planes faites par des plans perpendiculaires à l'axe, ou par des plans passant par l'axe.

Puisqu'à chaque point d'une surface donnée il existe en général deux sections normales de plus grande ou de moindre courbure, à chacun des points de cette surface correspondront aussi deux lignes de courbure qui, comme les sections principales, se couperont nécessairement à angle droit.

Considérons, en particulier, le cas où l'équation de la surface se présente sous la forme

$$u = z - f(x, y) = 0.$$

Pour obtenir la direction des lignes de courbure, qui

coïncide avec celle des sections principales, il suffira dans l'équation

$$(p^2+q^2+1)Q-[(p^2+1)t-2pqs-(q^2+1)r]Q+rt-s^2=0,$$

de substituer pour Q sa valeur tirée des équations

$$\frac{\cos\alpha}{s-pqQ}=\frac{\cos 6}{(p^2+1)Q-r}=\frac{\cos\gamma}{ps-qr+qQ},$$

et exprimée au moyen de l'un des rapports

$$\frac{\cos 6}{\cos\alpha}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{dz}{dx},$$

du premier, par exemple : on trouvera de cette manière

$$\frac{dy^2}{dx^2}[(q^2+1)s-pqt]+\frac{dy}{dx}[(q^2+1)r-(p^2+1)t]$$
$$-[(p^2+1)s-pqr]=0.$$

On prouvera très facilement que les deux racines de cette équation sont toujours réelles en supposant, ce qui est toujours permis, que le plan $\overline{xy}$ est parallèle au plan tangent; on aura en effet, dans cette hypothèse,

$$p=0,\quad q=0,$$

et l'équation qui précède deviendra

$$\frac{dy^2}{dx^2}s+\frac{dy}{dx}(r-t)-s=0,\quad \text{ou}\quad \frac{dy^2}{dx^2}+\frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx}-1=0;$$

on en tire

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{r-t}{2s}\pm\frac{1}{2s}\sqrt{(r-t)^2+4s^2}:$$

ces deux valeurs sont évidemment toujours réelles; en les désignant par tang τ, tang τ', on a de plus

$$\text{tang}\,\tau\ \text{tang}\,\tau=-1,$$

ce qui montre bien que les deux lignes de courbure sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Lorsque le point (x, y, z), pris sur la surface, est ce que nous avons appelé un ombilic, on a (nº 193)

$$(q^2 + 1)s - pqt = 0, \quad (p^2 + 1)s - pqr = 0,$$

et par suite

$$(q^2 + 1)r - (p^2 + 1)t = 0.$$

L'équation qui donne la direction des lignes de courbure devient identique, ou prend la forme $0 = 0$, ce qui annonce que d'un ombilic il part une infinité de lignes de courbure; nous avons vu en effet que dans ce cas toutes les sections normales sont des sections principales ou des sections de plus grande ou de moindre courbure.

199. Les lignes de courbure sont, en vertu même de leur définition, tangentes en chacun de leurs points à une section normale de plus grande ou de moindre courbure. De plus, le plan normal qui renferme une section de plus grande ou de moindre courbure au point (x, y, z), et par suite la tangente à la ligne de courbure en ce point, renferme en même temps la normale à la surface menée par un second point de la section infiniment voisin du premier. En partant de cette double propriété, on serait tenté de définir avec Monge les lignes de courbure des lignes qui renferment la suite des points d'une surface pour lesquels les normales infiniment voisines se rencontrent successivement; mais cette définition est réellement défectueuse, parce que de fait deux normales ne se rencontrent pas, quelque voisines qu'on les suppose. Ce qui est vrai, c'est que le rapprochement des normales correspondantes à deux points très voisins pris sur une ligne de courbure, est plus intime que dans toute autre direction; comparée au petit arc qui sépare ces deux

normales sur la surface, et que nous supposerons être un infiniment petit du premier ordre, leur plus courte distance serait un infiniment petit du second ordre, tandis qu'elle est en général du premier ordre ou de même ordre que l'arc. En partant de sa définition, voici comment le célèbre Monge arrivait à l'équation des lignes de courbure :

Supposons, pour plus de simplicité, que l'équation de la surface soit

$$u = z - f(x, y) = 0,$$

les équations de la normale au point (x, y, z) seront

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0,$$

ou

$$v = 0, \quad w = 0.$$

Pour passer de cette première normale à une seconde infiniment rapprochée, il faut faire croître les variables x, y, z de leurs différentielles; mais les fonctions v, w croissent aussi alors de leurs différentielles, et par conséquent les équations de cette seconde normale seront

$$v + dv = 0, \quad w + dw = 0,$$

ou, en réduisant,

$$dv = 0, \quad dw = 0.$$

Les coordonnées du point de rencontre de ces deux normales seront données dès-lors par les équations

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0,$$
$$dx + pdz = (\zeta - z)\,dp, \quad dy + qdz = (\zeta - z)\,dq.$$

Mais le nombre de ces équations surpasse le nombre des inconnues, et par conséquent deux normales consécutives ne se rencontreront pas toujours : cela n'aura lieu qu'autant que l'équation de condition que l'on obtient en éliminant ξ, η, ζ entre les équations qui précèdent sera vérifiée. On parvient facilement à cette équation en éliminant d'abord $\zeta - z$ entre les deux dernières équations; on

trouve ainsi

$$(dx+pdz)dq=(dy+qdz)dp\,;$$

si, maintenant, ayant égard aux relations connues,

$$dz=pdx+qdy\,;\quad dp=rdx+sdy\,,\quad dq=sdx+tdy\,,$$

on substitue, pour dz, dp, dq, leurs valeurs, il viendra

$$\frac{dy^2}{dx^2}[(q^2+1)s-pqt]+\frac{dy}{dx}[(q^2+1)r-(p^2+1)t]$$
$$-[(p^2+1)s-pqr]=0.$$

C'est l'équation à laquelle nous sommes déjà parvenus par une autre méthode.

Nota. Le plan osculateur d'une ligne de courbure en un point donné doit être soigneusement distingué du plan normal qui passe par la tangente à cette ligne. De même, le cercle osculateur d'une ligne de courbure doit être en général distingué du cercle osculateur à la section normale à laquelle cette ligne de courbure est tangente. Il n'existe en effet, en général, qu'un contact du premier ordre entre la ligne de courbure et la section principale qui ont seulement une même tangente correspondante aux mêmes valeurs des trois quantités $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, tandis que les différentielles secondes d^2x, d^2y, d^2z, etc., dont dépendent le plan osculateur et le rayon de courbure, changeront ordinairement de valeur dans le passage d'une de ces courbes à l'autre.

200. Les coordonnées ξ, η, ζ du centre, et le rayon ρ du cercle osculateur à une section normale passant par le point (x, y, z), vérifient, comme nous l'avons vu, les équations

$$\frac{x-\xi}{\frac{du}{dx}}=\frac{y-\eta}{\frac{du}{dy}}=\frac{z-\zeta}{\frac{du}{dz}}=\frac{1}{Q}=\pm\frac{\rho}{R}\,;$$

et si la section normale est de plus l'une des deux sections de plus grande et de moindre courbure, Q devra satisfaire à l'équation (A), page 364. Le centre du cercle osculateur devient alors ce qu'on appelle un des deux centres de courbure de la surface donnée pour le point (x, y, z). Si l'on veut obtenir l'équation de la surface lieu de tous ces centres de courbure, il suffira évidemment d'éliminer les variables x, y, z et Q entre les équations

$$u=0, \quad \frac{x-\xi}{\frac{du}{dx}}=\frac{1}{Q}, \quad \frac{y-\eta}{\frac{du}{dy}}=\frac{1}{Q}, \quad \frac{z-\zeta}{\frac{du}{dz}}=\frac{1}{Q},$$

et l'équation (A).

Exemple : Supposons, pour fixer les idées, que l'équation $u=0$ soit celle d'un ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes, ou que l'on ait

$$u=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0.$$

Les équations entre lesquelles devra se faire l'élimination seront

$$a^2\left(1-\frac{\xi}{x}\right)=\frac{1}{Q}, \quad b^2\left(1-\frac{\eta}{y}\right)=\frac{1}{Q}, \quad c^2\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)=\frac{1}{Q},$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(a^2-\frac{1}{Q}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(b^2-\frac{1}{Q}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(c^2-\frac{1}{Q}\right)}=0.$$

On peut même (n° 191) à l'équation de la surface ou de l'ellipsoïde substituer la suivante :

$$\frac{x^2}{a^2-\frac{1}{Q}}+\frac{y^2}{b^2-\frac{1}{Q}}+\frac{z^2}{c^2-\frac{1}{Q}}=1.$$

En mettant dans ces deux dernières équations, à la place

de x, y, z, leurs valeurs tirées des précédentes, on trouve

$$\frac{a^2\xi^2}{\left(a^2-\frac{1}{Q}\right)^3}+\frac{b^2\eta^2}{\left(b^2-\frac{1}{Q}\right)^3}+\frac{c^2\zeta^2}{\left(c^2-\frac{1}{Q}\right)^3}=0,$$
$$\frac{a^4\xi^2}{\left(a^2-\frac{1}{Q}\right)^3}+\frac{b^4\eta^2}{\left(b^2-\frac{1}{Q}\right)^3}+\frac{c^4\zeta^2}{\left(c^2-\frac{1}{Q}\right)^3}=1.$$

Il ne s'agira plus que d'éliminer Q, ou plutôt $\frac{1}{Q}$ entre ces deux formules, pour obtenir l'équation définitive entre ξ, η, ζ.

En substituant au contraire aux différences

$$a^2-\frac{1}{Q},\quad b^2-\frac{1}{Q},\quad c^2-\frac{1}{Q},$$

leurs valeurs

$$\frac{a^2\xi}{x},\quad \frac{b^2\eta}{y},\quad \frac{c^2\zeta}{z},$$

on aurait trouvé

$$\frac{1}{a^4}\frac{x^3}{\xi}+\frac{1}{b^4}\frac{y^3}{\eta}+\frac{1}{c^4}\frac{z^3}{\zeta}=0,\quad \frac{1}{a^2}\frac{x^3}{\xi}+\frac{1}{b^2}\frac{y^3}{\eta}+\frac{1}{c^2}\frac{z^3}{\zeta}=1.$$

Si l'on coupe la double surface lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde par les trois plans coordonnés, on obtiendra sur chacun de ces plans deux courbes distinctes. Cherchons en particulier les courbes d'intersection de la double surface dont il s'agit avec le plan $\overline{xy}$ en faisant $\zeta=0$, ce qui entraîne nécessairement $z=0$. Pour trouver ces courbes on déterminera d'abord les deux valeurs de Q que fournit l'équation

$$\frac{x^2}{a^2\left(a^2-\frac{1}{Q}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(b^2-\frac{1}{Q}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(c^2-\frac{1}{Q}\right)}=0,$$

quand on y suppose $z=0$; or on peut alors satisfaire à

cette équation, soit en prenant $c^2 - \frac{1}{Q} = 0$, ce qui rend le dernier terme du premier membre indéterminé, soit en posant

$$\frac{x^2}{a^2\left(a^2 - \frac{1}{Q}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(b^2 - \frac{1}{Q}\right)} = 0.$$

Dans le premier cas on aura

$$\frac{x}{a} = \frac{a\xi}{a^2 - c^2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{b\eta}{b^2 - c^2};$$

en substituant ces valeurs de $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ dans l'équation de l'ellipsoïde, et supprimant le terme $\frac{z^2}{c^2}$, on a définitivement pour première courbe d'intersection l'ellipse

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{b^2\eta^2}{(b^2 - c^2)^2} = 1.$$

Pour obtenir la seconde il faudra combiner entre elles les deux équations

$$\frac{1}{a^4}\frac{x^3}{\xi} + \frac{1}{b^4}\frac{y^3}{\eta} = 0, \quad \frac{1}{a^2}\frac{x^3}{\xi} + \frac{1}{b^2}\frac{y^3}{\eta} = 1.$$

On tirera de ces dernières

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 = \frac{a\xi}{a^2 - b^2}, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{b\eta}{b^2 - a^2},$$

ou, en faisant pour abréger

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = \pm A, \quad \frac{a^2 - b^2}{b} = \pm B, \quad \frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

En substituant ces dernières valeurs de $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$ dans l'é-

quation de l'ellipsoïde, puis effaçant le terme $\frac{z^2}{c^2}$, on trouvera pour l'équation de la seconde courbe cherchée

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Donc cette seconde courbe ne sera, comme on devait s'y attendre, que la développée de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

201. Considérons une courbe quelconque tracée sur la surface que représente l'équation $u=0$, et considérons que par la tangente à cette courbe au point (x, y, z) on fasse passer une section normale, le rayon ρ du cercle osculateur à cette section normale correspondant au point (x, y, z), et les coordonnées ξ, η, ζ de son centre vérifieront les équations

$$\frac{x-\xi}{\frac{du}{dx}}=\frac{y-\eta}{\frac{du}{dy}}=\frac{z-\zeta}{\frac{du}{dz}}=\frac{1}{Q}=\pm\frac{\rho}{R};$$

d'où l'on tire

$$(1)\ x-\xi=\frac{1}{Q}\frac{du}{dx},\ y-\eta=\frac{1}{Q}\frac{du}{dy},\ z-\zeta=\frac{1}{Q}\frac{du}{dz},\ \rho=\pm\frac{1}{Q}\,R.$$

Q et R sont d'ailleurs (n° 186) déterminés par les équations

$$Qds^2=dx\,d.\frac{du}{dx}+dy\,d.\frac{du}{dy}+dz\,d.\frac{du}{dz},$$
$$R=\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}.$$

Si l'on fait varier le point (x, y, z) sur la courbe donnée, le point (ξ, η, ζ) variera en même temps et décrira une seconde courbe correspondante à la première, et dont on trouverait les équations en éliminant x, y, z entre les

équations (1) et l'équation de la surface $u = 0$. Pour parvenir à connaître quelques-unes des propriétés de cette seconde courbe, différentions les équations (1) en faisant varier à la fois toutes les quantités qu'elles renferment : nous trouverons ainsi

$$dx - d\xi = \frac{1}{Q}\, d.\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}\, d.\frac{1}{Q},$$

$$dy - d\eta = \frac{1}{Q}\, d.\frac{du}{dy} + \frac{du}{dy}\, d.\frac{1}{Q},$$

$$dz - d\zeta = \frac{1}{Q}\, d.\frac{du}{dz} + \frac{du}{dz}\, d.\frac{1}{Q},$$

$$d\rho = \pm\left(\frac{1}{Q}\, dR + R d.\frac{1}{Q}\right).$$

Si, en ayant égard à la formule

$$\frac{du}{dx}\, dx + \frac{du}{dy}\, dy + \frac{du}{dz}\, dz = 0,$$

on ajoute les trois premières de ces équations respectivement multipliées par dx, dy, dz, on trouvera

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - (dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta)$$
$$= \frac{1}{Q}\left(dx\, d.\frac{du}{dx} + dy\, d.\frac{du}{dy} + dz\, d.\frac{du}{dz}\right) = ds^2,$$

et, par suite,

$$dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = 0.$$

Si, au contraire, on ajoute ces équations respectivement multipliées par $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, on trouvera

$$-\left(\frac{du}{dx}\, d\xi + \frac{du}{dy}\, d\eta + \frac{du}{dz}\, d\zeta\right) = \frac{1}{Q}\left(\frac{du}{dx}\, d.\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\, d.\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\, d.\frac{du}{dz}\right)$$
$$+ d\frac{1}{Q}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right] = \frac{1}{Q}\, R\, dR + R^2\, d.\frac{1}{Q},$$

et l'on en conclura

$$\frac{du}{dx}d\xi + \frac{du}{dy}d\eta + \frac{du}{dz}d\zeta = \mp \mathrm{R}d\rho,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\frac{du}{dx}d\xi + \frac{du}{dy}d\eta + \frac{du}{dz}d\zeta}{\mathrm{R}\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}} = \mp \frac{d\rho}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}.$$

Enfin, si en appelant l, m, n les angles que la perpendiculaire au plan de la section normale fait avec les axes, et en ayant égard aux équations

$$\cos l\, dx + \cos m\, dy + \cos n\, dz = 0,$$

$$\cos l \frac{du}{dx} + \cos m \frac{du}{dy} + \cos n \frac{du}{dz} = 0,$$

on ajoute de nouveau les mêmes équations respectivement multipliées par $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, on trouvera

$$\cos l\, d\xi + \cos m\, d\eta + \cos n\, d\zeta$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{Q}}\left(\cos l\, d.\frac{du}{dx} + \cos m\, d.\frac{du}{dy} + \cos n\, d.\frac{du}{dz}\right).$$

202. Reprenons les trois équations

$$dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = 0,$$

$$\frac{\frac{du}{dx}d\xi + \frac{du}{dy}d\eta + \frac{du}{dz}d\zeta}{\mathrm{R}\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}} = \mp \frac{d\rho}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}},$$

$$\cos l\, d\xi + \cos m\, d\eta + \cos n\, d\zeta$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{R}}\left(\cos l\, d.\frac{du}{dx} + \cos m\, d.\frac{du}{dy} + \cos n\, d.\frac{du}{dz}\right):$$

la première exprime que les tangentes menées à la première et à la seconde courbe par les points correspon-

dants (x, y, z), (ξ, η, ζ), comprennent toujours un angle droit; la seconde fait voir que le cosinus de l'angle formé par la tangente à la seconde courbe avec la normale à la surface est équivalent, au signe près, au rapport entre la différentielle du rayon de courbure et la différentielle de l'arc de la seconde courbe. Enfin, si la courbe donnée coïncide avec une ligne de courbure, on aura (n° 196)

$$\cos l\, d.\frac{du}{dx} + \cos m\, d.\frac{du}{dy} + \cos n\, d.\frac{du}{dz} = 0,$$

et la troisième équation, réduite à

$$\cos l\, d\xi + \cos m\, d\eta + \cos n\, d\zeta = 0,$$

prouvera que la tangente à la seconde courbe sera comprise dans le plan normal qui renferme la tangente à la première; et, comme d'ailleurs ces deux tangentes se coupent à angle droit, on conclura que la tangente à la seconde courbe coïncide avec la normale au point (x, y, z). A raison de cette coïncidence, le cosinus que représente le premier membre de la seconde équation se trouvera réduit à ± 1, et l'on aura

$$\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2} = d\sigma = \pm d\rho,$$

σ étant l'arc de seconde courbe; il suit de cette dernière équation que, dans le cas où la première courbe est une ligne de courbure, l'arc compris entre deux points de la seconde courbe est équivalent à la différence des valeurs de ρ qui correspondent à ces deux points; et comme dans ce cas le rayon de courbure ρ est précisément la partie de la tangente à la seconde courbe qui se trouve comprise entre cette seconde courbe et la première, il sera vrai de dire que la seconde courbe fait, à l'égard de la première, l'office de développée.

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

Des surfaces qui sont osculatrices l'une de l'autre en un point qui leur est commun. — Sur les divers ordres de contact des surfaces courbes.

---

203. On dit que deux surfaces sont osculatrices l'une de l'autre en un point qui leur est commun lorsqu'elles ont en ce point, non-seulement le même plan tangent ou la même normale, mais encore des sections principales comprises dans les mêmes plans normaux, et les mêmes rayons de courbure principaux dirigés dans les mêmes sens. Alors le contact qui existe entre les deux surfaces prend le nom d'osculation. Concevons que, dans le même cas, on mène par le point commun aux deux surfaces un plan quelconque normal ou oblique : il coupera ces deux surfaces suivant deux courbes qui auront nécessairement le même rayon de courbure : car d'une part, les rayons de courbure des sections normales ne dépendent que des rayons de courbure principaux et de la direction de la tangente à la section normale; de l'autre, les rayons de courbure des sections obliques sont complétement déterminés quand on connaît le rayon de courbure de la section normale correspondante et l'angle que font entre elles ces deux sections : or ces quantités dont dépendent les rayons de courbure sont évidemment les mêmes pour les sections faites par un même plan dans les deux surfaces osculatrices. Cela posé, comme en appelant δ l'angle de

la section normale avec la section oblique, le rayon de courbure de cette dernière section est donné par l'équation

$$\frac{\cos\delta}{\rho} = -\frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

il faudra nécessairement que le second membre de cette dernière équation reste invariable dans le passage de la première surface à la seconde pour toutes les valeurs des angles α, β, γ que fait avec les axes la tangente à l'une quelconque des sections faites dans la surface : or cette tangente étant située dans le plan tangent ou perpendiculaire à la normale, on aura

$$p\cos\alpha + q\cos\beta = \cos\gamma;$$

d'où l'on tire, en substituant pour $\cos\gamma$ sa valeur dans l'équation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + (p\cos\alpha + q\cos\beta)^2 = 1.$$

Il faudra donc que pour toutes les valeurs de α, β, propres à vérifier cette dernière équation, l'expression

$$\frac{r\cos^2\alpha + s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

ne change pas de valeur. D'ailleurs les deux surfaces se touchant par hypothèse, les quantités p et q, et par suite le dénominateur $\sqrt{p^2+q^2+1}$, ne varieront pas dans le passage de l'une à l'autre; il faut donc qu'il en soit de même du dénominateur

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta.$$

Or ce numérateur se réduisant, lorsqu'on suppose $\cos\beta = 0$, au produit $r\cos^2\alpha$, et lorsqu'on suppose $\cos\alpha = 0$, au produit $t\cos^2\beta$, il est évident que les deux

quantités r et t ne doivent pas changer de valeur dans le passage dont il s'agit, et que par suite il doit en être de même de la quantité s. Si donc on remarque que p, q, r, s, t, sont précisément les dérivées partielles du premier et du second ordre de la valeur de z fournie par l'équation de la surface dans le cas où l'on considère x et y comme variables indépendantes, on arrivera au théorème suivant :

204. Pour que deux surfaces représentées par deux équations entre les coordonnées rectangulaires x, y, z soient osculatrices l'une de l'autre en un point donné, il faut que les six quantités

$$z,\ p = \frac{dz}{dx},\quad q = \frac{dz}{dy},\quad r = \frac{d^2z}{dx^2},\quad s = \frac{d^2z}{dxdy},\quad t = \frac{d^2z}{dy^2},$$

conservent, pour le point commun, dans le passage de la première surface à la seconde, les mêmes valeurs numériques et les mêmes signes.

Réciproquement, si pour des valeurs données de x et de y ces six quantités ne varient pas dans le passage d'une première surface à une seconde, ces deux surfaces seront osculatrices l'une de l'autre. En effet, il est d'abord évident qu'elles auront un point commun, et en ce point un même plan tangent; de plus, de l'équation

$$\frac{\cos\delta}{\rho} = -\frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

on conclura que si l'on coupe ces deux surfaces par un plan quelconque normal ou oblique, les deux courbes d'intersection auront le même rayon de courbure; enfin, puisque les équations qui donnent les rayons de courbure principaux et les directions des sections principales dépendent des seules quantités p, q, r, s, t, les deux surfaces auront les mêmes rayons de courbure principaux

correspondants aux mêmes sections principales, et par conséquent leur point de contact sera un point d'osculation. Toutefois cette conséquence ne serait pas rigoureuse si la valeur de ρ donnée par l'équation

$$\frac{\cos\delta}{\rho} = -\frac{r\cos\alpha + 2s\cos\alpha\cos\text{ϐ} + t\cos^2\text{ϐ}}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

se présentait sous une forme indéterminée, ce qui arriverait si les valeurs des quantités p, q, r, s, t, ou de quelques-unes d'entre elles devenaient infinies; et, dans ce dernier cas, les deux surfaces, sans être osculatrices l'une de l'autre, pourraient fournir pour le point commun des valeurs égales des dérivées p, q, r, s et t.

Corollaire 1[er]. Pour qu'un point dans lequel les deux surfaces se touchent devienne un point d'osculation, il suffit évidemment que dans le passage d'une surface à l'autre la courbe du second degré tracée sur le plan tangent, et dont les rayons vecteurs sont égaux aux racines carrées des rayons de courbure des sections normales, ne varie pas. Or, une courbe du second degré est complétement déterminée quand on connaît le centre et trois rayons vecteurs menés du centre à trois points de la courbe. De plus, étant donné le rayon de courbure d'une section faite dans une surface par un plan oblique, on en déduit immédiatement, à l'aide du théorème qui lie les rayons de courbure des sections obliques aux rayons de de courbure des sections normales ou de l'équation $\rho = \rho' \cos\delta$, le rayon de courbure de la section normale qui a même tangente, et par conséquent l'un des rayons vecteurs de la courbe ci-dessus mentionnée. Donc, pour qu'un point dans lequel les deux surfaces se touchent soit un point d'osculation, il faut et il suffit que trois plans menés arbitrairement par ce point coupent les deux surfaces suivant des courbes osculatrices l'une de l'autre; ce

qui arrivera, par exemple, si les rayons de courbure des sections faites dans la première et dans la seconde surface par des plans parallèles aux plans coordonnés sont égaux et dirigés dans le même sens.

Corollaire 2me. Soient maintenant $u = 0$ et $v = 0$ les équations des deux surfaces courbes, u, v désignant des fonctions des coordonnées rectangulaires x, y, z. Si l'on différentie deux fois la première de ces équations par rapport aux variables indépendantes x et y, on obtiendra

$$\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dx\,dz} + p^2\frac{d^2u}{dz^2} + r\frac{du}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} + p\frac{d^2u}{dydz} + q\frac{d^2u}{dxdz} + pq\frac{d^2u}{dz^2} + s\frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} + 2q\frac{d^2u}{dydz} + q^2\frac{d^2u}{dz^2} + t\frac{du}{dz} = 0;$$

on en déduira

$$p = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}, \qquad q = -\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}},$$

$$r = -\frac{\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dxdz}\frac{du}{dx}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\left(\frac{du}{dz}\right)^3},$$

$$s = -\frac{\frac{d^2u}{dxdy}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dydz}\frac{du}{dx}\frac{du}{dz} - \frac{d^2u}{dxdz}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}}{\left(\frac{du}{dz}\right)^3},$$

$$t = -\frac{\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dydz}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\left(\frac{du}{dz}\right)^3}.$$

Cela posé, pour que les deux surfaces soient osculatrices l'une de l'autre au point commun (x, y, z), ou, ce qui revient au même, pour que les valeurs de p, q, r, s, t, déduites des équations de ces surfaces, ne varient pas dans le passage de l'une à l'autre, ou quand on remplace u par v, il sera nécessaire et il suffira que les coordonnées x, y, z du point commun aux deux surfaces vérifient la formule

$$\frac{\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dxdz}\frac{du}{dx}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2v}{dxdz}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2v}{dz^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2} = \frac{\frac{d^2u}{dxdy}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \frac{d^2u}{dydz}\frac{du}{dx}\frac{du}{dz} - \frac{d^2u}{dxdz}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}}{\frac{d^2v}{dxdy}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - \frac{d^2v}{dydz}\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} - \frac{d^2v}{dxdz}\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2v}{dz^2}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dx}}$$

$$= \frac{\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dydz}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\frac{d^2v}{dy^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2v}{dydz}\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2v}{dz^2}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^3} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dy}\right)^3} = \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dz}\right)^3}.$$

Cette formule équivaut à cinq équations distinctes, et puisqu'elle doit subsister quand on échange entre eux les axes des x, des y et des z, il sera permis de remplacer l'une des fractions qu'elle renferme, par exemple la seconde, par celle qu'on obtiendrait en substituant dans la première la lettre y à la lettre z; donc pour que les deux surfaces soient osculatrices en un point commun (x, y, z), il est nécessaire et il suffit généralement que les coordonnées de ce point vérifient la formule

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^3} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dy}\right)^3} = \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^3}{\left(\frac{dv}{dz}\right)^3} = \frac{\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dxdz}\frac{du}{dx}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2v}{dxdz}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2v}{dz^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dydz}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\frac{d^2v}{dy^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2v}{dydz}\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2v}{dz^2}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2} = \frac{\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dxdy}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\frac{d^2v}{dx^2}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2v}{dxdy}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{d^2v}{dy^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}.$$

205. En résumé, le contact du second ordre d'une surface avec une première surface donnée en un point (x, y, z), exige que l'équation de la seconde surface satis-

fasse à six conditions; dès-lors, puisque l'équation générale d'une sphère ne renferme que quatre constantes dont on puisse disposer, savoir, son rayon et les trois coordonnées de son centre, et que ces quatre constantes ne suffisent pas pour satisfaire à six conditions, il en résulte qu'il n'existe pas en chaque point d'une surface donnée de sphère osculatrice, ou qui ait avec cette surface un contact de second ordre, au lieu qu'il y a toujours un cercle osculateur pour chaque point d'une courbe à simple ou à double courbure.

On peut assigner une raison plausible de cette différence : le caractère propre de la sphère, c'est que sa courbure est la même dans toutes les directions autour de l'un quelconque de ses points, tandis que pour une autre surface cette courbure varie généralement d'une direction à l'autre; il ne pourra donc pas arriver que les rayons de courbure des sections faites dans la sphère et dans la surface soient égaux, si ce n'est dans certains cas particuliers, par exemple si le point que l'on considère sur la surface est un ombilic.

L'équation générale de la surface d'un ellipsoïde contient neuf coefficients constants; si donc on donne un point M sur une surface donnée, on pourra toujours déterminer une infinité d'ellipsoïdes qui seront osculateurs de la surface en ce point.

206. Considérons plus généralement deux surfaces qui se touchent en un point donné M. Si par ce point on mène un plan normal aux deux surfaces, les deux lignes d'intersection seront tangentes l'une à l'autre, et auront entre elles un contact d'un certain ordre, cet ordre pouvant du reste demeurer toujours le même ou changer de valeur avec la position du plan normal. Le nombre qui représente l'ordre de contact des deux lignes quand il est invariable, ou sa valeur minimum dans le cas contraire, sert à mesurer ce que l'on appelle l'ordre de con-

tact des deux surfaces. Soit a cet ordre, et P, Q les points où les courbes d'intersection normale prolongées dans un certain sens, sont rencontrées par un arc de cercle décrit du point M comme centre avec un rayon très petit désigné par i. Si l'on considère ce rayon comme un infiniment petit du premier ordre, la distance PQ variable avec la position du plan normal sera elle-même une quantité infiniment petite d'un ordre marqué par un nombre constant ou variable dont $a+1$ représentera la valeur unique ou la valeur minimum.

Concevons maintenant que par le point P situé sur la première surface on mène une sécante qui forme, avec le plan tangent aux deux surfaces, un angle ϖ sensiblement différent de 0, et rencontre la seconde surface en S. On démontrera, comme nous l'avons fait quand il était question de deux courbes qui se touchent, que la distance PS sera un infiniment petit du même ordre que PQ, et la distance MR du point M à la sécante PS un infiniment petit du premier ordre, et l'on déduira immédiatement de cette remarque les propositions suivantes.

207. Théorème 1er. L'ordre de contact de deux surfaces qui se touchent en un point donné M est inférieur d'une unité à la valeur unique ou à la valeur minimum du nombre qui représente l'ordre de la distance infiniment petite comprise entre les points P et S où elles sont rencontrées par une sécante qui forme un angle sensible avec le plan tangent commun à ces deux surfaces, lorsqu'on considère la distance du point de contact à la sécante dont il s'agit comme un infiniment petit du premier ordre.

Théorème 2me. Lorsque deux surfaces ont entre elles un contact de l'ordre a, tout plan normal ou oblique qui forme un angle sensible avec le plan tangent commun à ces surfaces, les coupe suivant deux courbes qui ont entre

elles un contact de l'ordre a, ou d'un ordre supérieur à a; l'ordre de contact des deux courbes pourrait même devenir infini si elles se confondaient l'une avec l'autre.

Théorème 3[me]. Pour obtenir l'ordre de contact de deux surfaces qui se touchent en un point où le plan tangent n'est pas parallèle à l'axe des z, il suffit de mener une ordonnée dont la distance au point de contact soit un infiniment petit du premier ordre, et de chercher la valeur unique ou la valeur minimum du nombre constant ou variable qui représente l'ordre de la portion infiniment petite d'ordonnée comprise entre les deux surfaces; cet ordre ou cette valeur minimum, diminuée d'une unité, indique l'ordre du contact.

Corollaire 1[er]. Soient

$$z=f(x,y), \quad z=F(x,y),$$

les équations des deux surfaces, elles auront un point commun, et en ce point le même plan tangent; si l'on a pour ce point

$$f(x,y)=F(x,y), \quad \frac{df(x,y)}{dx}=\frac{dF(x,y)}{dx}, \quad \frac{df(x,y)}{dy}=\frac{dF(x,y)}{dy},$$

et si l'on considère la distance $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ comme infiniment petite du premier ordre, l'ordre de la quantité infiniment petite $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y+\Delta y)$, ou sa valeur minimum surpassera d'une unité l'ordre de contact des courbes.

Corollaire 2[me]. Si les deux surfaces se touchent en un point de l'axe des z, mais de manière que le plan tangent ne passe pas par cet axe, il suffira, pour déterminer l'ordre du contact, de chercher le nombre qui indiquera l'ordre de la différence $F(x,y)-f(x,y)$, en considérant les deux variables x, y comme des infiniment petits

du premier ordre, et de diminuer ce nombre d'une unité. On reconnaîtra de cette manière que les surfaces $z=x^2+y^2$, $z=x^3+y^3$, $z=x^2+y^3$, $z=x^3+y^2$, ont entre elles, à l'origine, un contact du premier ordre, tandis que les surfaces $z=x^n+y^n$, $z=x^{n+1}+y^{n+1}$, ont un contact de l'ordre n, et les surfaces $z=x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}$, $z=x^{\frac{5}{4}}+y^{\frac{5}{4}}$, un contact de l'ordre $\frac{1}{4}$.

Corollaire 3me. En conservant les hypothèses du premier corollaire, et posant $\Delta x=\alpha dx$, $\Delta y=\alpha dy$,

$$F(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy)-f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy)=\varphi(\alpha),$$

la différence $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ deviendra $\varphi(\alpha)$, et puisque, en supposant que α est un infiniment petit du premier ordre, cette différence doit être un infiniment petit de l'ordre $a+1$, dans le cas où, comme nous le supposons, les deux surfaces ont entre elles un contact de l'ordre a, on aura, en désignant par n le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à a

$$\varphi(0)=0\quad \varphi'(0)=0, \ldots\ldots \varphi^{(n)}(0)=0,$$

et $\varphi^{(n+1)}(\alpha)$ sera la première des fonctions dérivées de $\varphi(\alpha)$ qui cessera de s'évanouir avec α. On a d'ailleurs, comme on l'a vu,

$$\varphi(0)=F(x,y)-f(x,y),\quad \varphi'(0)=dF(x,y)-df(x,y),$$
$$\varphi^{(n)}(0)=d^nF(x,y)-d^nf(x,y),$$
$$\varphi^{(n+1)}(0)=d^{n+1}F(x,y)-d^{n+1}f(x,y);$$

les coordonnées du point de contact des deux surfaces satisferont donc aux équations

$$F(x,y)=f(x,y),\quad dF(x,y)=df(x,y), \ldots\ldots$$
$$d^nF(x,y)=d^nf(x,y),$$

ou, ce qui revient au même, aux équations

$$F(x,y)=f(x,y), \quad \frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy=\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy+\frac{d^2F}{dy^2}dy^2=\frac{d^2f}{dx^2}dx^2$$
$$+2\frac{d^2f}{dxdy}dxdy+\frac{d^2f}{dy^2}dy^2,$$

. . . .

$$\frac{d^nF}{dx^n}dx^n+\frac{n}{1}\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy\ldots+\frac{d^nF}{dy^n}dy^n=\frac{d^nf}{dx^n}dx^n$$
$$+\frac{n}{1}\frac{d^nf}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy\ldots+\frac{d^nf}{dy^n}dy^n.$$

Ces dernières formules devant subsister quelles que soient les valeurs finies attribuées aux différentielles dx, dy, entraîneront évidemment les suivantes :

$$F(x,y)=f(x,y), \quad \frac{dF}{dx}=\frac{df}{dx}, \quad \frac{dF}{dy}=\frac{df}{dy}, \quad \frac{d^2F}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx^2},$$
$$\frac{d^2F}{dxdy}=\frac{d^2f}{dxdy}, \quad \frac{d^2F}{dy^2}=\frac{d^2f}{dy^2},$$

. . . .

$$\frac{d^nF}{dx^n}=\frac{d^nf}{dx^n}, \quad \frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}=\frac{d^nf}{dx^{n-1}dy}, \ldots \frac{d^nF}{dxdy^{n-1}}=\frac{d^nf}{dxdy^{n-1}},$$
$$\frac{d^nF}{dy^n}=\frac{d^nf}{dy^n}.$$

Par conséquent, lorsque deux surfaces se touchent en un point où le plan tangent n'est pas parallèle à l'axe des z, non-seulement, pour le point dont il s'agit, l'ordonnée z considérée comme fonction des deux variables indépendantes x, y, mais encore ses différentielles dz, $d^2z\ldots d^{n-1}z$,

$d^n z$ et ses dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, ... jusqu'à celles dont l'ordre coïncide avec le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à l'ordre du contact, conserveront les mêmes valeurs dans le passage de la première surface à la seconde.

Corollaire 4me. Lorsque le plan tangent commun aux deux surfaces n'étant pas parallèle à l'axe des z, l'ordre du contact est un nombre entier, il suffit, pour le déterminer, de chercher quelle est la dernière des équations

$$F(x,y)=f(x,y),\ dF(x,y)=df(x,y),\ d^2F(x,y)=d^2f(x,y)\ldots$$
$$d^nF(x,y)=d^nf(x,y),$$

qui se trouve vérifiée pour le point de contact, indépendamment des valeurs attribuées aux différentielles dx, dy des variables indépendantes. L'ordre des différentielles totales comprises dans cette dernière équation sera précisément l'ordre demandé.

Corollaire 5me. Si le plan tangent commun aux deux surfaces devenait parallèle à l'axe des z, il faudrait, dans les corollaires qui précèdent, substituer l'une des variables x, y à la variable z. Ainsi, pour montrer que les deux surfaces $z=x^{\frac{1}{3}}(1-y^2)^{\frac{1}{3}}$, $z=x^{\frac{1}{4}}(1-y^3)^{\frac{1}{4}}$ qui touchent à l'origine le plan $\overline{yz}$ ont en ce point un contact du second ordre, il suffira d'observer que leurs équations résolues par rapport à x prennent les formes $x=\frac{z^3}{1-y^2}$, $x=\frac{z^4}{1-y^3}$, et que la différence $\frac{z^4}{1-y^3}-\frac{z^2}{1-y^2}$ est un infiniment petit du troisième ordre, quand on considère y et z comme des infiniment petits du premier.

On peut d'ailleurs choisir toujours pour axe des z un axe qui ne soit pas parallèle au plan tangent mené par le

point de contact des deux surfaces. A l'aide de cette remarque jointe à la définition des deux surfaces osculatrices, on conclura généralement que deux surfaces qui ont entre elles un contact du second ordre ou d'un ordre plus élevé sont osculatrices l'une de l'autre, et réciproquement que deux surfaces osculatrices ont au point d'osculation un contact du second ordre ou d'un ordre supérieur au second.

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

Des surfaces que peuvent engendrer, en se mouvant dans l'espace, des lignes droites ou courbes de forme constante ou variable.

208. Considérons une ligne droite ou courbe représentée par deux équations qui renferment avec les coordonnées rectangulaires x, y, z, deux paramètres ou constantes arbitraires c et c_1; si l'on résout ces équations par rapport aux constantes dont il s'agit, on en tirera $u = c$, $v = c_1$, u et v désignant deux fonctions des variables x, y, z. De plus, si l'on attribue successivement aux constantes c et c_1 une infinité de valeurs arbitrairement choisies, la ligne représentée par les équations $u=c$, $v=c_1$, changera de position, souvent même de forme, sans décrire aucune surface déterminée; mais si l'on établit entre c et c_1 une relation quelconque, si l'on suppose, pour fixer les idées, $c_1=\varphi(c)$, $\varphi(c)$ désignant une fonction de la constante c, les équations $u = c$, $v = \varphi(c)$ représenteront une ligne dont la forme et la position seront complétement déterminées pour chaque valeur particulière de la constante c. Donc si l'on attribue successivement à cette constante une infinité de valeurs, la ligne en question se mouvra de manière à engendrer une certaine surface dont l'équation sera $v=\varphi(u)$, ou ce que l'on obtient quand, entre les deux équations de la courbe, on éli-

mine la quantité c qui seule varie d'une courbe génératrice à l'autre. La règle générale, pour trouver l'équation de la surface engendrée par les positions successives de la courbe, est donc très simple. Il faut, 1° résoudre les équations de la génératrice par rapport aux deux paramètres variables c et c_1; 2° exprimer que l'un de ces paramètres est fonction de l'autre; 3° éliminer les deux paramètres en substituant pour chacun sa valeur en x, y, z tirée des équations de la génératrice. Il importe de remarquer que la courbe donnée $u=c$, $v=c$, ne devient proprement génératrice que du moment où les deux constantes sont liées l'une avec l'autre.

1er *Exemple :* On demande l'équation générale d'une surface cylindrique, c'est-à-dire d'une surface engendrée par le mouvement d'une droite qui reste constamment parallèle à elle-même. Si l'on nomme α, β, γ les angles constants que doit former cette droite prolongée dans un certain sens avec les trois axes des coordonnées positives, et x_0, y_0, z_0 les coordonnées variables d'un de ses points, ses équations seront

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma},$$

ou

$$x\cos\beta-y\cos\alpha=x_0\cos\beta-y_0\cos\alpha=c,$$
$$x\cos\gamma-z\cos\alpha=x_0\cos\gamma-z_0\cos\alpha=c_1,$$

c, c_1 désignant, pour abréger, les constantes arbitraires $x_0\cos\beta-y_0\cos\alpha$, $x_0\cos\gamma-z_0\cos\alpha$. Si l'on attribuait aux constantes c et c_1 une infinité de valeurs sans établir entre elles aucune relation, la droite

$$x\cos\beta-y\cos\alpha=c,\quad x\cos\gamma-z\cos\alpha=c_1,$$

pourrait se mouvoir de manière à remplir successivement

tout l'espace; mais si l'on suppose $c_1 = \varphi(c)$, les équations

$$x \cos 6 - y \cos \alpha = c, \quad x \cos \gamma - z \cos \alpha = \varphi(c),$$

représenteront la génératrice d'une surface cylindrique qui aura pour équation

$$x \cos \gamma - y \cos \alpha = \varphi(x \cos 6 - y \cos \alpha).$$

On aurait pu prendre, pour représenter la génératrice, les deux équations

$$lx + my + nz = c, \quad l_1 x + m_1 y + n_1 z = c_1,$$

et l'équation de la surface cylindrique aurait été

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = \varphi\,(lx + my + nz).$$

On voit par ce qui précède que pour obtenir l'équation finie d'une surface cylindrique, il suffit d'établir une relation quelconque entre deux fonctions linéaires des variables x, y, z.

2me *Exemple :* On demande l'équation générale d'une surface conique, c'est-à-dire d'une surface engendrée par une droite mobile qui passe constamment par un point donné. Appelons x_0, y_0, z_0 les coordonnées constantes de ce point qu'on appelle le sommet du cône, $\alpha, 6, \gamma$ les angles variables formés par la génératrice avec les axes; les équations de cette génératrice seront

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos 6} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma},$$

ou

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\cos 6}{\cos \alpha} = c, \quad \frac{z - z_0}{x - x_0} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} = c_1 = \varphi(c),$$

et la surface conique aura pour équation

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \varphi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right), \quad z - z_0 = (x - x_0)\,\varphi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right):$$

cette valeur de $z - z_0$ est précisément celle que l'on obtiendrait en égalant à o une fonction homogène quelconque des trois différences $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$. Si l'on prenait l'origine pour sommet de la surface conique, on aurait

$$x_0=0, \quad y_0=0, \quad z_0=0, \quad z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

et pour obtenir l'équation de la surface conique, il suffirait d'égaler à o une fonction homogène quelconque des variables x, y, z.

3[me] *Exemple :* On demande l'équation d'une surface conoïde engendrée par une droite mobile qui passe constamment par un axe donné, en demeurant perpendiculaire à cet axe. Si l'axe dont il s'agit coïncide avec l'axe des z, les deux équations de la génératrice et l'équation de la surface conoïde seront

$$\frac{y}{x}=c, \quad z=\varphi(c), \quad z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

en sorte que l'ordonnée de cette surface se trouvera exprimée par une fonction homogène de x et de y du degré nul.

Supposons maintenant que l'axe de la surface conoïde coïncide avec une droite menée par un point donné x_0, y_0, z_0, de manière à former avec les axes des angles α, β, γ. La génératrice de la surface pourra être considérée comme produite par l'intersection de deux plans mobiles, dont l'un passerait constamment par l'axe de la surface, tandis que l'autre serait perpendiculaire à cet axe. Nommons λ, μ, ν les angles que fait avec les axes la perpendiculaire au premier plan, son équation sera

$$(x-x_0)\cos\lambda+(y-y_0)\cos\mu+(z-z_0)\cos\nu=0.$$

Les angles λ, μ, ν satisferont de plus à la condition

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0.$$

De ces deux équations réunies on tire

$$\frac{\cos\lambda}{(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta}=\frac{\cos\mu}{(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma}$$
$$=\frac{\cos\nu}{(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha},$$
$$\frac{(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta}{(x-x_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\alpha}=-\frac{\cos\lambda}{\cos\mu}=c.$$

L'équation du second plan perpendiculaire à l'axe sera évidemment de la forme

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=c_1;$$

de sorte que les équations de la génératrice et de la surface conoïde seront

$$\frac{(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta}{(x-x_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\alpha}=c,$$
$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\varphi(c),$$
$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\varphi\left[\frac{(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta}{(x-x_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\alpha}\right].$$

4me *Exemple.* Concevons que l'on demande l'équation finie d'une surface de révolution, on pourra prendre pour génératrice de cette surface une courbe plane tournant autour d'un axe nommé axe de révolution et situé dans le plan de la courbe, ou, ce qui revient au même, un cercle dont le rayon serait variable, mais dont le plan resterait toujours perpendiculaire à l'axe dont il s'agit, et dont le centre serait situé sur ce même axe. Cela posé, admettons d'abord que l'axe de révolution coïncide avec l'axe des z, les deux équations du cercle générateur seront de la forme

$$x^2+y^2=c,\quad z=\varphi(c);$$

et, par suite, l'équation de la surface de révolution sera

$$z=\varphi(x^2+y^2).$$

Si l'axe de révolution coïncide avec une droite menée par un point donné x_0, y_0, z_0, de manière à former avec les demi-axes des coordonnées positives des angles α, $\mathit{6}$, γ, le cercle générateur sera évidemment la courbe d'intersection d'une sphère qui aura pour centre le point x_0, y_0, z_0, et d'un plan perpendiculaire à l'axe de révolution; les équations de ce cercle et l'équation de la surface de révolution seront dès-lors

$$x\cos\alpha + y\cos6 + z\cos\gamma = c,$$
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \varphi(c),$$
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \varphi(x\cos\alpha + y\cos6 + z\cos\gamma).$$

209. On pourrait, en généralisant ces principes, faire mouvoir dans l'espace des lignes tellement choisies, que la construction des surfaces engendrées par le mouvement de ces lignes dépendît de plusieurs constantes ou fonctions arbitraires. Considérons en effet une ligne droite ou courbe dont les équations soient

$$f(x, y, z, c, c_1, c_2 \ldots) = 0, \quad F(x, y, z, c, c_1, c_2 \ldots) = 0,$$

et renferment avec les variables x, y, z, plusieurs paramètres ou constantes arbitraires c, c_1, c_2, ... Si l'on attribue successivement à ces constantes une infinité de valeurs arbitrairement choisies, la ligne en question changera de position, souvent même de forme, sans décrire aucune surface déterminée, à moins que l'on n'établisse entre les constantes c, c_1, c_2, ... des relations telles que la valeur de l'une étant donnée, les valeurs de toutes les autres s'en déduisent, en posant, par exemple,

$$c_1 = \varphi_1(c), \quad c_2 = \varphi_2(c), \quad c_3 = \varphi_3(c) \ldots;$$

φ_1, φ_2, φ_3, ... désignant des fonctions de la constante c. Dans ce cas, si l'on attribue successivement à cette constante une infinité de valeurs, la ligne en question se mouvra

de manière à engendrer une certaine surface ; or, la forme et la position de cette surface dépendront évidemment de la nature des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ que l'on peut choisir arbitrairement ; et pour obtenir son équation, il suffira d'éliminer c entre les deux équations

$$f[x, y, z, c, \varphi_1(c), \varphi_2(c) \ldots] = 0,$$
$$F[x, y, z, c, \varphi_1(c), \varphi_2(c) \ldots] = 0;$$

mais on ne pourra en général effectuer cette élimination qu'après avoir remplacé les fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ par des fonctions déterminées de la constante c.

On pourrait faire dépendre les unes des autres plusieurs des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ et prendre, par exemple, pour φ_2, φ_3, les dérivées successives de la fonction $\varphi_1(c)$, en posant $\varphi_2(c) = \varphi_1'(c)$, $\varphi_3(c) = \varphi_1''(c) \ldots$

210. Lorsqu'une surface est engendrée par le mouvement d'une ligne droite ou courbe dont les équations renferment une fonction arbitraire, on peut déterminer cette fonction de manière que la surface passe par une ligne donnée qui s'appelle alors la directrice.

Soient toujours $v = c$, $w = \varphi(c)$ les équations de la génératrice, et $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, les équations de la directrice, ou, ce qui revient au même, les équations de deux surfaces qui la renferment. Pour déterminer la nature de la fonction φ, il suffira d'assujétir chaque génératrice à passer par un point de la directrice ; la fonction φ devra donc être choisie de telle sorte, que les quatre équations qui précèdent soient vérifiées simultanément par un système unique de valeurs de x, y, z : par conséquent la valeur de $\varphi(c)$ se déduira de l'équation produite par l'élimination des coordonnées x, y, z entre ces quatre équations. La nature de la fonction $\varphi(c)$ étant ainsi déterminée, l'équation $w = \varphi(v)$, qui ne renfermera plus rien d'arbitraire, sera l'équation de la surface

décrite par le mouvement de la génératrice s'appuyant dans toutes ses positions sur la directrice donnée.

211. Si l'on voulait déterminer la fonction φ de manière que la surface fût circonscrite à une surface donnée, il faudrait chercher d'abord les équations de la ligne de contact des deux surfaces, et l'on procéderait ensuite, comme on vient de le dire, en prenant pour directrice la ligne dont il s'agit. Or, soit $u = 0$ l'équation de la surface donnée; la normale menée à cette surface par un point quelconque (x, y, z) de la ligne de contact formera avec les axes des angles dont les cosinus seront proportionnels aux dérivées partielles $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$, tandis que la tangente menée par le même point à la génératrice de la surface forme avec les mêmes axes des angles dont les cosinus (n° 156) seront proportionnels aux quantités

$$\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} = \text{P}, \quad \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dz} = \text{Q},$$
$$\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dx} = \text{R}.$$

Mais puisque, par hypothèse, la surface décrite par la génératrice doit être circonscrite à la surface $u = 0$, la normale de cette dernière surface doit être perpendiculaire à la génératrice. On devra donc avoir pour tous les points de la courbe de contact

$$\text{P}\frac{du}{dx} + \text{Q}\frac{du}{dy} + \text{R}\frac{du}{dz} = 0,$$

et les équations de cette courbe de contact qui, dans l'hypothèse admise, deviendra la directrice de la surface $w = \varphi(v)$, seront $u = 0$, $\text{P}\frac{du}{dx} + \text{Q}\frac{du}{dy} + \text{R}\frac{du}{dz} = 0$.

Quoique l'on puisse déterminer la forme de la fonction φ à l'aide de la méthode que nous venons d'exposer,

on parviendra plus facilement à l'équation définitive de la surface qui a pour génératrice la ligne

$$v = c, \quad w = \varphi(c),$$

et pour directrice la ligne

$$f(x, y, z) = o, \quad F(x, y, z) = o,$$

en procédant comme il suit. Désignons désormais par ξ, η, ζ les coordonnées courantes de la génératrice, et par V, W ce que deviennent les quantités v, w quand on y remplace x, y, z par ξ, η, ζ; les équations de cette génératrice deviendront $V = v$, $W = w$. Or si l'on élimine x, y, z entre les quatre équations

$$f(x, y, z) = o, \quad F(x, y, z) = o, \quad V = v, \quad W = w,$$

on obtiendra une équation nouvelle qui renfermera les seules coordonnées ξ, η, ζ, et qui sera vérifiée pour un point quelconque de l'une des génératrices; donc cette équation sera précisément celle de la surface ci-dessus mentionnée.

De même, si l'on élimine x, y, z entre les quatre équations

$$V = v, \quad W = w, \quad u = o, \quad P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} + R\frac{du}{dz} = o,$$

on obtiendra l'équation engendrée par la ligne $v = o$, $w = \varphi(c)$, et circonscrite à la surface $u = o$.

212. 1[er] *Exemple* : On demande l'équation de la surface cylindrique qui aurait pour directrice une courbe plane donnée par les équations

$$x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = K, \quad F(x, y, z) = o;$$

λ, μ, ν sont les angles que la perpendiculaire au plan de la courbe fait avec les axes. Les équations de la génératrice seront de la forme $\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma}$, et en ap-

pelant δ l'angle de la génératrice avec la perpendiculaire au plan de la directrice, on aura

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

Des équations qui précèdent, on tire

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma} = \frac{(\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu}{\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu},$$

et par suite

$$x = \xi - \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}(\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu - \mathrm{K}),$$

$$y = \eta - \frac{\cos\beta}{\cos\delta}(\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu - \mathrm{K}),$$

$$z = \zeta - \frac{\cos\gamma}{\cos\delta}(\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu - \mathrm{K});$$

et en substituant les valeurs de x, y, z dans l'équation $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$, on obtiendra pour l'équation de la surface cylindrique

$$\mathrm{F}\left[\xi - \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}(\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu - \mathrm{K}),\ \eta - \frac{\cos\beta}{\cos\delta}(\xi\cos\lambda + \text{etc.}),\ \zeta - \frac{\cos\gamma}{\cos\delta}(\xi\cos\lambda + \text{etc.})\right] =$$

Lorsque le plan de la directrice coïncide avec le plan $\overline{xy}$, elle peut être représentée par deux équations de la forme $z = 0$, $\mathrm{F}(x, y) = 0$, et l'équation de la surface cylindrique se réduit à

$$\mathrm{F}\left(\frac{\xi\cos\gamma - \zeta\cos\alpha}{\cos\gamma}, \frac{\eta\cos\gamma - \zeta\cos\beta}{\cos\gamma}\right) = 0.$$

Si la directrice devenait parallèle à l'axe des z, on aurait $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$, et la surface cylindrique se réduirait à l'équation de la base : $\mathrm{F}(\xi, \eta) = 0$.

Concevons, pour fixer les idées, que la directrice soit

l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, l'équation de la surface cylindrique sera

$$\frac{(\xi\cos\gamma-\zeta\cos\alpha)^2}{a^2}+\frac{(\eta\cos\gamma-\zeta\cos\beta)^2}{b^2}=\cos^2\gamma.$$

2me *Exemple.* On demande l'équation d'une surface cylindrique circonscrite à une autre surface donnée $u=0$.

Pour obtenir son équation, il faudra, d'après ce que nous avons dit, éliminer x, y, z entre les quatre équations

$$u=0,\quad \frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma=0,$$
$$\frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma}.$$

Supposons que la surface $u=0$ est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

on aura

$$\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma$$
$$=\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma=\frac{(\xi-x)x}{a^2}+\frac{(\eta-y)y}{b^2}+\frac{(\xi-z)z}{c^2}=0,$$

et en réduisant, $\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1$.

Désignons de plus par $2R$ celui des diamètres de l'ellipsoïde qui sera parallèle aux génératrices du cylindre, les coordonnées de l'extrémité de ce diamètre seront $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, $R\cos\gamma$; et, comme elles doivent vérifier l'équation de l'ellipsoïde, on aura

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=\frac{1}{R^2},$$

et par suite

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos 6} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma} = \frac{(\xi - x)\frac{\cos\alpha}{a^2} + (\eta - y)\frac{\cos 6}{b^2} + (\zeta - z)\frac{\cos\gamma}{c^2}}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 6}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}}$$

$$= \mathrm{R}^2\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2} + \frac{\eta\cos 6}{b^2} + \frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}\right) = \frac{(\xi - x)\frac{\xi}{a^2} + (\eta - y)\frac{\eta}{b^2} + (\zeta - z)\frac{\zeta}{c^2}}{\frac{\xi\cos\alpha}{a^2} + \frac{\eta\cos 6}{b^2} + \frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}}$$

$$= \frac{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1}{\frac{\xi\cos\alpha}{a^2} + \frac{\eta\cos 6}{b^2} + \frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}},$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = \mathrm{R}^2\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2} + \frac{\eta\cos 6}{b^2} + \frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}\right)^2.$$

Telle est l'équation de la surface cylindrique circonscrite à l'ellipsoïde. Pour lui donner une forme plus simple, M. Cauchy remarque que le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x, y, z) a pour équation, en appelant X, Y, Z ses coordonnées courantes,

$$\frac{x}{a^2}(\mathrm{X} - x) + \frac{y}{b^2}(\mathrm{Y} - y) + \frac{z}{c^2}(\mathrm{Z} - z) = 0,$$

ou

$$\frac{\mathrm{X}x}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}y}{b^2} + \frac{\mathrm{Z}z}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

d'où l'on conclut, en ayant égard aux équations

$$x = \mathrm{R}\cos\alpha, \quad y = \mathrm{R}\cos 6, \quad z = \mathrm{R}\cos\gamma,$$

$$\frac{\mathrm{X}\cos\alpha}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}\cos 6}{b^2} + \frac{\mathrm{Z}\cos\gamma}{c^2} = \frac{1}{\mathrm{R}}.$$

Supposons de plus qu'on mène une droite du centre de l'ellipsoïde à un point (ξ, η, ζ) pris sur la surface du cylindre circonscrit. Cette droite coupera l'ellipsoïde et le

plan tangent en deux nouveaux points (x, y, z), (X, Y, Z); et si l'on désigne par r, s, t les distances du centre de l'ellipsoïde aux points (x, y, z); (ξ, η, ζ); (X, Y, Z), on aura évidemment

$$x=\frac{r}{s}\xi,\quad y=\frac{r}{s}\eta,\quad z=\frac{r}{s}\zeta,\quad X=\frac{t}{s}\xi,\quad Y=\frac{t}{s}\eta,\quad Z=\frac{t}{s}\zeta;$$

et en substituant ces valeurs dans les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad \frac{X\cos\alpha}{a^2}+\frac{Y\cos\beta}{b^2}+\frac{Z\cos\gamma}{c^2}=\frac{1}{R},$$

il viendra

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=\frac{s^2}{r^2},\qquad R\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}+\frac{\eta\cos\beta}{b^2}+\frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}\right)=\frac{s}{t}.$$

Ces dernières équations, combinées avec l'équation de la surface cylindrique circonscrite, la transformeront en

$$\frac{s^2}{r^2}-1=\frac{s^2}{t^2}\quad\text{ou}\quad \frac{1}{r^2}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{t^2}.$$

Telle est la forme la plus simple que puisse prendre l'équation de cette surface.

Si à l'ellipsoïde on substituait un hyperboloïde à une ou deux nappes représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\quad\text{ou}\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

l'équation de la surface cylindrique circonscrite à cet hyperboloïde serait, dans le premier cas,

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}-1=R^2\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}+\frac{\eta\cos\beta}{b^2}-\frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}\right);$$

et dans le second,

$$\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-1=R^2\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}+\frac{\eta\cos\beta}{b^2}-\frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}\right)^2.$$

Dans l'un et l'autre cas, la courbe de contact de l'hyperboloïde et de la surface cylindrique serait plane, et son plan serait représenté par l'équation

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}-\frac{z\cos\gamma}{c^2}=0.$$

Si l'on demandait l'équation de la surface cylindrique circonscrite au paraboloïde elliptique représenté par l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}$, on trouverait que le plan de la courbe de contact a pour équation

$$\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta=\frac{1}{c}\cos\gamma,$$

et que les coordonnées ξ, η, ζ, d'un point quelconque de la surface cylindrique satisfont à la condition

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}-\frac{z}{c}=\frac{\zeta}{c}.$$

On tirera de ces deux équations, jointes à celle de la génératrice,

$$\frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma}=\frac{\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}+\frac{\eta\cos\beta}{b^2}-\frac{\cos\gamma}{c}}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}}=\frac{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-2\frac{\zeta}{c}}{\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}+\frac{\eta\cos\beta}{b^2}-\frac{\cos\gamma}{c}},$$

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-2\frac{\zeta}{c}=\frac{\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}+\frac{\eta\cos\beta}{b^2}-\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}}.$$

Si au lieu du paraboloïde elliptique on considérait un paraboloïde hyperbolique représenté par la formule

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c},$$

l'équation de la surface cylindrique circonscrite devien-

drait évidemment

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-2\frac{\zeta}{c}=\frac{\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}-\frac{\eta\cos6}{b^2}-\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\cos^2 6}{b^2}}.$$

Supposons enfin que l'on demande la surface cylindrique circonscrite à une surface du second degré représentée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Iz=K,$$

on trouvera que les coordonnées de la courbe de contact et de la génératrice satisferont aux équations

$$\begin{aligned}(Ax+Fy+Ez+G)\cos\alpha+(Fx+By+Dz+H)\cos6\\+(Ex+Dy+Cz+I)\cos\gamma=o,\\(Ax+Fy+Ez+G)\xi+(Fx+By+Dz+H)\eta\\+(Ex+Dy+Cz+I)\zeta+Gx+Hy+Iz=K;\end{aligned}$$

et en combinant de nouveau ces deux équations avec celles de la génératrice, on aura enfin pour l'équation de la surface cylindrique demandée :

$$\begin{aligned}&A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2+2D\eta\zeta+2E\zeta\xi+2F\xi\eta+2G\xi+2H\eta+2I\zeta-K\\&=\frac{[(A\xi+F\eta+E\zeta+G)\cos\alpha+(F\xi+B\eta+D\zeta+H)\cos6+(E\xi+D\eta+C\zeta+I)\cos\gamma]^2}{A\cos^2\alpha+B\cos^2 6+C\cos^2\gamma+2D\cos6\cos\gamma+2E\cos\gamma\cos\alpha+2F\cos\alpha\cos6}.\end{aligned}$$

213. Proposons-nous de faire passer par une directrice donnée une surface conique dont le sommet coïncide avec le point (x_0, y_0, z_0). Les équations de la génératrice seront $\frac{\xi-x_0}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y_0}{\cos6}=\frac{\zeta-z_0}{\cos\gamma}$, et puisque cette génératrice doit toujours rencontrer la directrice en un point (x, y, z), on aura

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos6}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma},$$

et par suite

$$\frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{\eta - y_0}{y - y_0} = \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}.$$

Cela posé, si entre cette dernière formule et les équations de la directrice on élimine x, y, z, l'équation résultante qui renfermera seulement ξ, η, ζ sera précisément celle de la surface conique.

Exemple : Si la directrice est la courbe plane

$$Ax + By + Cz = K, \quad F(x, y, z) = 0,$$

on aura

$$\frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{\eta - y_0}{y - y_0} = \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} = \frac{A(\xi - x_0) + B(\eta - y_0) + C(\zeta - z_0)}{K - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)},$$

et par suite

$$x = x_0 - (\xi - x_0)\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - K}{A(\xi - x_0) + B(\eta - y_0) + C(\zeta - z_0)},$$

$$y = y_0 - (\eta - y_0)\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - K}{A(\xi - x_0) + B(\eta - y_0) + C(\zeta - z_0)},$$

$$z = z_0 - (\zeta - z_0)\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - K}{A(\xi - x_0) + B(\eta - y_0) + C(\zeta - z_0)}.$$

En substituant ces valeurs de x, y, z, dans l'équation $F(x, y, z) = 0$, et posant

$$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - K}{A(\xi - x_0) + B(\eta - y_0) + C(\zeta - z_0)} = U,$$

on trouvera pour l'équation de la surface conique

$$F[x_0 - (\xi - x_0)U, \quad y_0 - (\eta - y_0)U, \quad z_0 - (\zeta - z_0)U] = 0.$$

Lorsque la directrice est comprise dans le plan $\overline{xy}$ et représentée par les formules $z = 0$, $F(x, y) = 0$, l'équa-

tion de la surface conique se réduit à

$$F\left(\frac{x_0\zeta - z_0\xi}{\zeta - z_0}, \quad \frac{y_0\zeta - z_0\eta}{\zeta - z_0}\right) = 0.$$

Concevons, pour fixer les idées, que la directrice soit l'ellipse $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'équation de la surface conique sera

$$\frac{(x_0\zeta - z_0\xi)^2}{a^2} + \frac{(y_0\zeta - z_0\eta)^2}{b^2} = (\zeta - z_0)^2.$$

Supposons maintenant que la surface conique doive être circonscrite à une autre surface $u = 0$; comme en chaque point de la courbe de contact des deux surfaces, la génératrice de la première et la normale à la seconde se couperont à angles droits, les coordonnées x, y, z de cette courbe vérifieront évidemment les équations

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx}(x - x_0) + \frac{du}{dy}(y - y_0) + \frac{du}{dz}(z - z_0) = 0,$$

et pour obtenir l'équation de la surface conique, il ne reste plus qu'à éliminer x, y, z entre ces deux équations jointes à celles de la génératrice.

Concevons, par exemple, que la surface conique doive être circonscrite à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on devra avoir

$$\frac{x}{a^2}(x - x_0) + \frac{y}{b^2}(y - y_0) + \frac{z}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

et en réduisant

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1;$$

la courbe de contact sera une courbe plane, et en ayant

égard à cette équation, on trouvera

$$\frac{\xi - x}{x_0 - x} = \frac{\eta - y}{y_0 - y} = \frac{\zeta - z}{z_0 - z} = \frac{(\xi - x)\frac{x_0}{a^2} + (\eta - y)\frac{y_0}{b^2} + (\zeta - z)\frac{z_0}{c^2}}{(x_0 - x)\frac{x_0}{a^2} + (y_0 - y)\frac{y_0}{b^2} + (z_0 - z)\frac{z_0}{c^2}}$$

$$= \frac{\frac{x_0\xi}{a^2} + \frac{y_0\eta}{b^2} + \frac{z_0\zeta}{c^2} - 1}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1} = \frac{(\xi - x)\frac{\xi}{a^2} + (\eta - y)\frac{\eta}{b^2} + (\zeta - z)\frac{\zeta}{c^2}}{(x_0 - x)\frac{\xi}{a^2} + (y_0 - y)\frac{\eta}{b^2} + (z_0 - z)\frac{\zeta}{c^2}}$$

$$= \frac{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1}{\frac{x_0\xi}{a^2} + \frac{y_0\eta}{b^2} + \frac{z_0\zeta}{c^2} - 1},$$

et par suite,

$$\left(\frac{x_0\xi}{a^2} + \frac{y_0\eta}{b^2} + \frac{z_0\zeta}{c^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right).$$

Telle est l'équation de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde. Cette même équation peut être présentée sous une forme plus simple. Soient R_0 le rayon vecteur mené du centre de l'ellipsoïde au sommet de la surface conique; α, 6, γ les angles qu'il fait avec les axes; R la partie de ce rayon vecteur qui représente le rayon de l'ellipsoïde; l'extrémité de ce rayon aura pour coordonnées $R\cos\alpha$, $R\cos 6$, $R\cos\gamma$, et l'on aura

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 6}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2} = \frac{1}{R^2},$$

$$x_0 = R_0\cos\alpha,\quad y_0 = R_0\cos 6,\quad z_0 = R_0\cos\gamma,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = R_0^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 6}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right) = \frac{R_0^2}{R^2},$$

et l'équation de la surface conique deviendra

$$\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2} + \frac{\eta\cos 6}{b^2} + \frac{\zeta\cos\gamma}{c^2} - \frac{1}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2}\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right).$$

Concevons à présent qu'une droite soit menée du centre de l'ellipsoïde à un point (ξ, η, ζ), choisi arbitrairement sur la surface du cône circonscrit. Cette droite coupera l'ellipsoïde et le plan tangent qui touche l'ellipsoïde à l'extrémité du rayon R en deux nouveaux points, dont les coordonnées x, y, z, et X, Y, Z, vérifieront les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{\mathrm{X}\cos\alpha}{a^2}+\frac{\mathrm{Y}\cos\beta}{b^2}+\frac{\mathrm{Z}\cos\gamma}{c^2}=\frac{1}{\mathrm{R}}.$$

De plus, si l'on désigne par r, s, t les longueurs mesurées sur cette droite, à partir du centre de l'ellipsoïde, et qui aboutissent aux trois points (x, y, z); (ξ, η, ζ); $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$, on aura, comme on l'a vu plus haut,

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=\frac{s^2}{r^2}, \quad \mathrm{R}\left(\frac{\xi\cos\alpha}{a^2}+\frac{\eta\cos\beta}{b^2}+\frac{\zeta\cos\gamma}{c^2}\right)=\frac{s}{t},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{1}{\mathrm{R}t}-\frac{1}{\mathrm{R}_0 s}\right)^2=\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2}-\frac{1}{\mathrm{R}_0^2}\right)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{s^2}\right).$$

Telle est la forme la plus simple sous laquelle on puisse présenter l'équation de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde.

Si à l'ellipsoïde on substituait l'un des hyperboloïdes représentés par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

l'équation de la surface conique circonscrite se réduirait à l'une des suivantes :

$$\left(\frac{x_0\xi}{a^2}+\frac{y_0\eta}{b^2}-\frac{z_0\zeta}{c^2}-1\right)^2=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right),$$

$$\left(\frac{x_0\xi}{a^2}+\frac{y_0\eta}{b^2}-\frac{z_0\zeta}{c^2}+1\right)=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}+1\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}+1\right).$$

Pour obtenir l'équation de la surface conique circonscrite au paraboloïde elliptique $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$, on remarquera que les coordonnées de la courbe de contact et de la génératrice satisferont aux équations

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}-\frac{z}{c}=\frac{\zeta}{c}, \quad \frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}-\frac{z}{c}=\frac{z_0}{c};$$

on aura dès-lors

$$\frac{\xi-x}{x_0-x}=\frac{\eta-y}{y_0-y}=\frac{\zeta-z}{z_0-z}=\frac{\frac{x_0\xi}{a^2}+\frac{y_0\eta}{b^2}-\frac{\zeta+z_0}{c}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{2z_0}{c}}=\frac{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{2\zeta}{c}}{\frac{x_0\xi}{a^2}+\frac{y_0\eta}{b^2}-\frac{\zeta+z_0}{c}},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{x_0\xi}{a^2}+\frac{y_0\eta}{b^2}-\frac{\zeta+z_0}{c}\right)^2=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{2z_0}{c}\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{2\zeta}{c}\right).$$

Si au lieu du paraboloïde elliptique, on considérait un paraboloïde hyperbolique $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2\zeta}{c}$, l'équation de la surface conique circonscrite deviendrait évidemment

$$\left(\frac{x_0\xi}{a^2}-\frac{y_0\eta}{b^2}-\frac{\zeta+z_0}{c}\right)^2=\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{2z_0}{c}\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{2\zeta}{c}\right).$$

Supposons enfin que l'on demande la surface conique circonscrite à la surface représentée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy+2Gx+2Hy+2Iz=K,$$

on trouvera que les coordonnées de la courbe de contact et de la génératrice satisferont aux équations

$$\begin{aligned}(Ax+Fy+Ez+G)\xi&+(Fx+By+Dz+H)\eta\\&+(Ex+Dy+Cz+I)\zeta+Gx+Hy+Iz=K,\\(Ax+Fy+Ez+G)x_0&+(Fx+By+Dz+H)y_0\\&+(Ex+Dy+Cz+I)z_0+Gx+Hy+Iz=K;\end{aligned}$$

en partant de ces équations jointes à celles de la génératrice, on trouvera pour l'équation de la surface conique

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\eta\zeta + 2E\zeta\xi + 2F\xi\eta + 2G\xi + 2H\eta + 2I\zeta - K$$
$$= \frac{[(A\xi + F\eta + E\zeta + G)x_0 + (F\xi + B\eta + D\zeta + H)y_0 + (E\xi + D\eta + C\zeta + I)z_0 + G\xi + H\eta + I\zeta - K]^2}{Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dy_0z_0 + 2Ez_0x_0 + 2Fx_0y_0 + 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Iz_0 - K}.$$

214. Proposons-nous de faire passer une surface conoïde par une directrice donnée. Si cette surface a pour axe l'axe des z, les coordonnées ξ, η, ζ de la génératrice menée par le point (x, y, z) de la directrice, vérifieront les deux formules $\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y}$, $\zeta = z$; donc si entre ces formules et les équations de la directrice on élimine x, y, z, l'équation résultante qui renfermera seulement ξ, η, ζ sera précisément celle de la surface conoïde.

Lorsque la directrice est une courbe plane

$$Ax + By + Cz = K, \quad F(x, y, z) = 0,$$

on trouve

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{A\xi + B\eta}{Ax + By} = \frac{A\xi + B\eta}{K - Cz} = \frac{A\xi + B\eta}{K - C\zeta},$$

et par suite

$$z = \zeta, \quad x = \xi\frac{K - C\zeta}{A\xi + B\eta}, \quad y = \eta\frac{K - C\zeta}{A\xi + B\eta};$$

ces valeurs, substituées dans l'équation $F(x, y, z) = 0$, donnent pour l'équation de la surface conoïde

$$F\left(\xi\frac{K - C\zeta}{A\xi + B\eta}, \quad \eta\frac{K - C\zeta}{A\xi + B\eta}, \ \zeta\right) = 0.$$

Dans le cas particulier où la directrice est renfermée dans un plan perpendiculaire à l'axe des x et représentée par deux équations de la forme $x = a$, $F(y, z) = 0$, l'équation de la surface conoïde se réduit à

$$F\left(\frac{a\eta}{\xi}, \ \zeta\right) = 0.$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend pour directrice l'ellipse $x=a$, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, la surface conoïde sera représentée par l'équation $\frac{a^2\eta^2}{b^2\xi^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$, à laquelle on parviendrait aussi en prenant pour directrice le cercle

$$x=\frac{ac}{b}, \quad y^2+z^2=c^2.$$

Supposons maintenant que la surface conoïde doive être circonscrite à une autre surface $u=0$. Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe de contact devront vérifier les équations

$$u=0, \quad \mathrm{P}\frac{du}{dx}+\mathrm{Q}\frac{du}{dy}+\mathrm{R}\frac{du}{dz}=0,$$

qui, parce que l'on a

$$v=\frac{\xi}{x}-\frac{\eta}{y}, \quad w=\zeta-z,$$

se réduisent à

$$u=0, \quad x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=0.$$

Cela posé, pour obtenir l'équation de la surface conoïde il ne restera plus qu'à éliminer x, y, z, entre les quatre équations

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}, \quad \zeta=z, \quad u=0, \quad x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=0.$$

Concevons en particulier que la surface conoïde doive être circonscrite à l'ellipsoïde

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,$$

l'équation $x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=0$ deviendra

$$\frac{x(x-x_0)}{a^2}+\frac{y(y-y_0)}{b^2}=0,$$

et, en vertu de l'équation $\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}$,

$$\frac{\xi}{a^2}(x-x_0)+\frac{\eta}{b^2}(y-y_0)=0;$$

on aura dès-lors

$$\frac{\cdots x_0}{\cdots}=\frac{y-y_0}{\frac{-\xi}{a^2}}=\frac{(x-x_0)\eta-(y-y_0)\xi}{\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\xi^2}{a^2}}=\frac{y_0\xi-x_0\eta}{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}}$$

$$\cdots=\frac{\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}}{\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}}}=\pm ab\,\frac{\sqrt{1-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}}}=\pm ab\,\frac{\sqrt{1-\frac{(\zeta-z_0)^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}}},$$

et par conséquent

$$\frac{(y_0\xi-x_0\eta)^2}{a^2b^2}=\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)\left[1-\frac{(\zeta-z_0)^2}{c^2}\right].$$

Telle est l'équation de la surface conoïde circonscrite à l'ellipsoïde.

Si l'axe de la surface conoïde coïncidait non plus avec l'axe des z, mais avec la droite menée par un point donné (x_0, y_0, z_0), de manière à former avec les axes coordonnés les angles α, β, γ, les coordonnées ξ, η, ζ de la génératrice menée par le point (x, y, z) de la directrice vérifieraient les deux formules

$$(\xi-x)\cos\alpha+(\eta-y)\cos\beta+(\zeta-z)\cos\gamma=0,$$
$$(\xi-x)\cos l+(\eta-y)\cos m+(\zeta-z)\cos n=0,$$

l, m, n désignant les angles que fait avec les axes la perpendiculaire au plan qui renfermerait cette génératrice avec l'axe de la surface conoïde. Ces angles sont d'ailleurs liés entre eux par les deux équations

$$\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n=0,$$
$$(x-x_0)\cos l+(y-y_0)\cos m+(z-z_0)\cos n=0,$$

desquelles on tire

$$\frac{\cos l}{(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos6} = \frac{\cos m}{(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma}$$
$$= \frac{\cos n}{(x-x_0)\cos6-(y-y_0)\cos\alpha}.$$

Les deux équations de la génératrice qui passe par le point (x, y, z) de la directrice seront dès-lors

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos6 + (\zeta - z)\cos\gamma = 0,$$
$$\left.\begin{array}{l}[(y-y_0)\cos\gamma - (z-z_0)\cos6](\xi - x)\\ \quad + [(z-z_0)\cos\alpha - (x-x_0)\cos\gamma](\eta - y)\\ \quad + [(x-x_0)\cos6 - (y-y_0)\cos\alpha](\zeta - z)\end{array}\right\} = 0,$$

et pour obtenir l'équation de la surface conoïde, il suffit d'éliminer x, y, z entre ces deux dernières équations et les équations de la directrice. On peut, dans la seconde des équations de la génératrice, substituer les coordonnées ξ, η, ζ aux coordonnées x, y, z, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l}[(\eta-y_0)\cos\gamma - (\zeta-z_0)\cos6](\xi - x)\\ + [(\zeta-z_0)\cos\alpha - (\xi-x_0)\cos\gamma](\eta - y)\\ + [(\xi-x_0)\cos6 - (\eta-y_0)\cos\alpha](\zeta - z)\end{array}\right\} = 0.$$

Or de cette dernière formule réunie à l'équation

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos6 + (\zeta - z)\cos\gamma = 0,$$

on tire

$$\frac{\xi - x}{(\xi-x_0)-[(\xi-x_0)\cos\alpha+(\eta-y_0)\cos6+(\zeta-z_0)\cos\gamma]\cos\alpha}$$
$$= \frac{\eta - y}{(\eta-y_0)-[(\xi-x_0)\cos\alpha+(\eta-y_0)\cos6+(\zeta-z_0)\cos\gamma]\cos6}$$
$$= \frac{\zeta - z}{(\zeta-z_0)-[(\xi-x_0)\cos\alpha+(\eta-y_0)\cos6+(\zeta-z_0)\cos\gamma]\cos\gamma}.$$

Lorsque la directrice est plane et représentée par les équations $x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = \mathrm{K}$, $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$, chacune des fractions qui précèdent est équivalente au

rapport

$$\frac{\xi\cos\lambda+\eta\cos\mu+\zeta\cos\nu-k}{(\xi-x_0)\cos\lambda+(\eta-y_0)\cos\mu+(\zeta-z_0)\cos\nu-[(\xi-x_0)\cos\alpha+(\eta-y_0)\cos\beta+(\zeta-z_0)\cos\gamma]\cos\delta},$$

dans lequel $\cos\delta=\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu$, et de cette seule remarque on déduit immédiatement les valeurs de x, y, z, qui, substituées dans la seconde des équations $F(x, y, z)=0$, fournissent l'équation en ξ, η, ζ propre à représenter la surface conoïde.

Si l'on prenait pour directrice la droite qui aurait pour équation $\frac{x-x_1}{\cos\lambda}=\frac{y-y_1}{\cos\mu}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}$, on trouverait

$$\frac{-x_1)\cos\alpha+(\eta-y_1)\cos\beta+(\zeta-z_1)\cos\gamma}{\cos\delta}$$

$$\frac{y_0)\cos\gamma-(\zeta-z_0)\cos\beta](\zeta-x_1)+[(\zeta-z_0)\cos\alpha-(\xi-x_0)\cos\gamma](\eta-y_1)+[(\xi-x_0)\cos\beta-(\eta-y_0)\cos\alpha](\zeta-z_1)}{y_0)\cos\gamma-(\zeta-z_0)\cos\beta]\cos\lambda+[(\zeta-z_0)\cos\alpha-(\xi-x_0)\cos\gamma]\cos\mu+[(\xi-x_0)\cos\beta-(\eta-y_0)\cos\alpha]\cos\nu}.$$

Telle est l'équation du paraboloïde hyperbolique engendré par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites

$$\frac{\xi-x_0}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y_0}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z_0}{\cos\gamma},\quad \frac{x-x_1}{\cos\lambda}=\frac{\eta-y_1}{\cos\mu}=\frac{\zeta-z_1}{\cos\nu},$$

et de manière à rester toujours perpendiculaire à la première de ces droites.

Lorsque la surface conoïde doit être circonscrite à une autre surface $u=0$, on peut prendre pour directrice la courbe de contact de ces deux surfaces représentée elle-même par les deux équations

$$(x-x_0)\frac{du}{dx}+(y-y_0)\frac{du}{dy}+(z-z_0)\frac{du}{dz}$$
$$=[(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta+(z-z_0)\cos\gamma]\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right),$$

ou $\quad u=0,\quad (\xi-x)\frac{du}{dx}+(\eta-y)\frac{du}{dy}+(\zeta-z)\frac{du}{dz}=0.$

Cette dernière équation exprime qu'en chaque point de la courbe de contact la génératrice de la surface conoïde et la normale de la surface $u = 0$ se coupent à angles droits.

215. Proposons-nous enfin de faire passer une surface de révolution par une directrice donnée. Si cette surface a pour axe l'axe des z, les coordonnées ξ, η, ζ du cercle générateur, passant par le point (x, y, z) de la directrice, vérifieront les deux formules $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$, $\zeta = z$; donc, si entre ces formules et les équations de la directrice on élimine x, y, z, l'équation résultante qui renfermera seulement ξ, η, ζ sera précisément celle de la surface cherchée.

Supposons maintenant que la surface de révolution doive être circonscrite à une autre surface représentée par l'équation $u = 0$. Alors on pourra prendre pour directrice la courbe de contact des deux surfaces, qui sera représentée elle-même par les deux équations

$$u = 0, \qquad x\frac{du}{dy} - y\frac{du}{dx} = 0.$$

Concevons, pour fixer les idées que la surface $u = 0$ se réduise à l'ellipsoïde de révolution

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{a^2}{c^2}\left[c^2 - (z - z_0)^2\right],$$

l'équation $x\dfrac{du}{dx} - y\dfrac{du}{dy} = 0$ se réduira à $\dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0}$: on aura

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \pm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = \pm\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

$$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0} = -1 \pm \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = \pm\frac{a}{c}\frac{\sqrt{c^2-(c-z_0)^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

et par suite

$$\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2} \mp \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}\left[c^2-(\zeta-z_0)^2\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\xi^2+\eta^2-\frac{a^2}{c^2}\left[c^2-(\zeta-z_0)^2\right]+x_0^2+y_0^2\right\}^2 = 4(x_0^2+y_0^2)(\xi^2+\eta^2).$$

Telle est l'équation de la surface de révolution qui, ayant pour axe l'axe des z, est circonscrite à l'ellipsoïde de révolution donné.

Si l'axe de la surface de révolution coïncidait non plus avec l'axe des z, mais avec la droite menée par un point donné (x_0, y_0, z_0), de manière à former avec les axes certains angles α, 6, γ, les coordonnées ξ, η, ζ du cercle générateur passant par le point (x, y, z) de la directrice, vérifieraient les deux équations

$$(\xi-x)\cos\alpha+(\eta-y)\cos 6+(\zeta-z)\cos\gamma=0,$$
$$(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

et la surface de révolution circonscrite pourrait être considérée comme ayant pour directrice la courbe représentée par les équations

$$=0, \qquad [(y-y_0)\cos 6-(z-z_0)\cos\gamma]\frac{du}{dx}+[(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma]\frac{du}{dy}$$
$$+[(x-x_0)\cos 6-(y-y_0)\cos\alpha]\frac{du}{dz}=0.$$

Ces applications suffisent pour montrer la marche à suivre dans chaque cas particulier.

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

Équations aux dérivées partielles des surfaces engendrées par le mouvement des lignes.

---

216. Considérons d'abord la surface engendrée par le mouvement de la ligne représentée par les équations $v=c$, $w=\varphi(c)$. Si l'on nomme p et q les valeurs des dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ que fournit l'équation de la surface, dans le cas où l'on regarde x, y comme variables indépendantes, et z comme une fonction de ces deux variables, on aura

$$dz = pdx + qdy,$$

et cette dernière équation sera toujours satisfaite quand les coordonnées x, y, z varieront de manière que le point (x, y, z) décrive une courbe comprise dans la surface dont il s'agit. Or si la courbe en question se confond avec la génératrice de la surface, elle aura pour équation $v=c$, $w=\varphi(c)$, et les différentielles de ses coordonnées vérifieront les formules

$$\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz = 0, \quad \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz = 0:$$

en faisant, pour abréger,

$$P = \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}, \quad Q = \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dz},$$

$$R = \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dx},$$

on tirera de ces deux équations $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$, et puisque les différentielles dx, dy, dz doivent vérifier l'équation $dz = pdx + pdy$, on aura définitivement

$$Pp + Qq = R.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles de toutes les surfaces que peut représenter l'équation $w = \varphi(v)$, et qui sont engendrées par le mouvement de la ligne $v = c$, $w = \varphi(c)$. Cette équation aux dérivées partielles ne renferme plus la fonction arbitraire indiquée par la lettre φ, mais seulement les dérivées partielles de z, savoir, p et q avec les quantités P, Q, R qui sont des fonctions déterminées des variables x, y, z.

On peut parvenir directement à l'équation $Pp + Qq = R$, en éliminant par une double différentiation la fonction φ. En effet, différentions l'équation $w = \varphi(v)$ en regardant tour à tour x et z ou y et z comme seules variables, il viendra

$$\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz}p = \frac{d\varphi(v)}{dv}\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}p\right),$$
$$\frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz}q = \frac{d\varphi(v)}{dv}\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}q\right).$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre ou les multipliant en croix pour éliminer $\frac{d\varphi(v)}{dv}$, on retrouvera l'équation $Pp + Qq = R$.

On pourrait encore établir cette équation en considérant un point quelconque (x, y, z) de la surface $w = \varphi(v)$ et observant que si l'on mène à ce point une normale à la surface et une normale à la génératrice, ces deux droites seront perpendiculaires l'une à l'autre. En effet, les cosinus des angles que forment avec les axes la normale et la tangente sont proportionnels, d'une part, aux quantités p, q, -1, de l'autre aux valeurs de dx, dy, dz tirées des

équations de la génératrice, et par conséquent à P, Q, R; donc, puisque le cosinus de l'angle des deux droites doit s'évanouir, on aura

$$Pp + Qq - R = 0 \quad \text{ou} \quad Pp + Qq = R.$$

1[er] *Exemple :* Concevons que l'on demande l'équation aux dérivées partielles d'une surface cylindrique. Si l'on nomme α, β, γ les angles formés par la génératrice avec les axes, ses équations seront

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma};$$

et l'on en tirera

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma},$$

de sorte que l'équation aux dérivées partielles des surfaces cylindriques sera

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta.$$

Pour l'établir directement il suffirait d'exprimer que la normale menée par un point quelconque d'une surface cylindrique forme un angle droit avec l'une quelconque des génératrices de la surface.

2[me] *Exemple :* On demande l'équation aux dérivées partielles d'une surface conique. En appelant x_0, y_0, z_0 les coordonnées du sommet, les équations de la génératrice seront encore

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma},$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0};$$

l'équation aux dérivées partielles sera donc

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

On l'établirait directement en exprimant que le plan tangent à la surface conique passe toujours par le sommet. En effet, si l'on nomme ξ, η, ζ les coordonnées courantes du plan tangent mené à la surface par le point (x, y, z), son équation sera

$$z - \zeta = p(x - \xi) + q(y - \eta),$$

et si ce plan doit renfermer constamment le point (x_0, y_0, z_0), on devra avoir

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

Dans le cas particulier où le sommet de la surface conique coïncide avec l'origine des coordonnées, l'équation aux dérivées partielles de cette surface se réduit à $z = px + qy$. Cette dernière équation est celle que fournit le théorème des fonctions homogènes dans le cas où l'on suppose que la fonction des variables x, y, désignée par z, est homogène et du premier degré.

3[me] *Exemple*. On demande l'équation aux dérivées partielles d'une surface conoïde. Si cette surface a pour axe l'axe des z, la génératrice sera représentée par les équations $\frac{y}{x} = c$, $z = \varphi(c)$, d'où l'on tire

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad dz = 0,$$

et l'on conclura de ces dernières que l'équation aux dérivées partielles de la surface conoïde est $px + qy = 0$. Cette équation est précisément celle qui exprime que l'ordonnée z est une fonction homogène et du degré 0 des variables x, y. On peut l'établir encore en remarquant que si par le point (x, y, z) on mène un plan tangent à la surface conoïde, ce plan renfermera la génératrice tout

entière, et, par conséquent, le point d'intersection de la génératrice avec l'axe, c'est-à-dire le point qui sur cet axe répond à l'ordonnée z. En effet, si dans l'équation du plan tangent $z - \zeta = p(x - \xi) + q(y - \eta)$, on pose $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = z$, on trouve $px + qy = 0$.

Supposons maintenant que l'axe de la surface conoïde coïncide avec une droite menée par le point (x_0, y_0, z_0), de manière à former avec les axes les angles α, β, γ; la génératrice pourra être représentée par les équations

$$(x - x_0)\cos l + (y - y_0)\cos m + (z - z_0)\cos n = c,$$
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \varphi(c),$$

qui donneront par la différentiation

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0,$$
$$\cos l\, dx + \cos m\, dy + \cos n\, dz = 0,$$

les cosinus des angles l, m, n étant d'ailleurs déterminés par les équations

$$\frac{\cos l}{(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta} = \frac{\cos m}{(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma}$$
$$= \frac{\cos n}{(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha},$$

on en conclut

$$\left.\begin{array}{r} [(y - y_0)\cos\gamma - (z - z_0)\cos\beta]\,dx \\ + [(z - z_0)\cos\alpha - (x - x_0)\cos\gamma]\,dy \\ + [(x - x_0)\cos\beta - (y - y_0)\cos\alpha]\,dz \end{array}\right\} = 0;$$

et en substituant pour dz sa valeur $dz = p\,dx + q\,dy$,

$$(\cos\alpha + p\cos\beta)\,dx + (\cos\beta + q\cos\gamma)\,dy = 0,$$
$$\Big\{(y-y_0)\cos\gamma - (z-z_0)\cos\beta + p[(x-x_0)\cos\beta - (y-y_0)\cos\alpha]\Big\}\,dx$$
$$+ \Big\{(z-z_0)\cos\alpha - (x-x_0)\cos\gamma + q[(x-x_0)\cos\beta - (y-y_0)\cos\alpha]\Big\}\,dy = 0;$$

si maintenant l'on élimine dx et dy entre ces deux équa-

tions, on trouvera pour l'équation aux dérivées partielles de la surface conoïde

$$\frac{(y-y_0)\cos\alpha-(z-z_0)\cos\beta+p[(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha}{\cos\alpha+p\cos\gamma}$$
$$=\frac{(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma+q[(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha]}{\cos\beta+q\cos\gamma}.$$

On peut présenter cette équation sous une forme plus simple; pour cela éliminons dz, 1° entre les équations

$$\cos\alpha dx+\cos\beta dy+\cos\gamma dz=0,$$
$$\cos l dx+\cos m dy+\cos n dz=0;$$

2° entre les équations

$$dz=pdx+qdy \quad \text{et} \quad \cos l dx+\cos m dy+\cos n dz=0;$$

nous trouverons de cette manière

$$\frac{\cos\alpha\cos n-\cos\gamma\cos l}{\cos l+p\cos n}=\frac{\cos\beta\cos n-\cos\gamma\cos m}{\cos m+q\cos n}.$$

De plus, en ayant égard aux équations

$$\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n=0,$$
$$(x-x_0)\cos l+(y-y_0)\cos m+(z-z_0)\cos n=0,$$

et égalant chacune de ces fractions à la fraction que l'on obtient quand après avoir multiplié haut et bas les deux termes de la première par $\cos\alpha$, et les deux termes de la seconde par $\cos\beta$, ou les deux termes de la première par $x-x_0$, et les deux termes de la seconde par $y-y_0$, on divise la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs, on trouvera

$$\frac{\cos\alpha\cos n-\cos\gamma\cos l}{\cos l+p\cos n}=\frac{\cos\beta\cos n-\cos\gamma\cos m}{\cos m+q\cos n}=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{p\cos\alpha+q\cos\beta-\cos\gamma}$$
$$=\frac{(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta+(z-z_0)\cos\gamma}{p(x-x_0)+q(y-y_0)-(z-z_0)},$$

ou enfin

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)-(z-z_0)$$
$$=(p\cos\alpha+q\cos\beta-\cos\gamma)[(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta+(z-z_0)\cos\gamma].$$

Telle est, sous la forme la plus simple, l'équation aux dérivées partielles de la surface conoïde. Pour établir directement cette équation, il suffira de projeter la distance du point (x_0, y_0, z_0) au point (x, y, z), 1° sur l'axe de la surface conoïde; 2° sur la normale menée à la surface par le point (x, y, z), et d'observer que la seconde projection devant être égale en longueur à la perpendiculaire abaissée du point (x_0, y_0, z_0) sur le plan tangent, a nécessairement pour mesure le produit de la première projection par le cosinus de l'angle aigu compris entre la normale et l'axe.

4me *Exemple.* On demande l'équation aux dérivées partielles d'une surface de révolution. Si cette surface a pour axe l'axe des z, le cercle générateur sera représenté par les équations $x^2+y^2=c$, $z=\varphi(c)$, d'où l'on tirera

$$xdx+ydy=0, \qquad dz=0.$$

Ces équations, combinées avec l'équation $dz=pdx+qdy$, donneront $\frac{p}{x}=\frac{q}{y}$. On arriverait à la même conclusion en observant que, dans l'hypothèse admise, la normale menée à la surface par un point quelconque (x, y, z), doit toujours rencontrer l'axe des z, et qu'en conséquence, la projection de la normale sur le plan xy doit passer par l'origine. En effet, si l'on nomme ξ, η, ζ les coordonnées courantes de la normale, cette droite sera représentée par la formule

$$\frac{x-\xi}{p}=\frac{y-\eta}{q}=\zeta-z;$$

et pour que sa projection sur le plan $\overline{xy}$ passe par l'origine, il suffira que ses équations soient vérifiées quand on y fera $\xi = 0$, $\eta = 0$, ce qui donne

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q}, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{x} = \frac{q}{y}.$$

Supposons maintenant que l'axe de révolution coïncide avec une droite menée par le point (x_0, y_0, z_0), de manière à former avec les axes les angles α, β, γ; le cercle générateur aura pour équations

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = c,$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varphi(c);$$

d'où l'on tire

$$(x - x_0)dx + (y - y_0)dy + (z - z_0)dz = 0,$$
$$\cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz = 0,$$

et par suite

$$\frac{dx}{(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta} = \frac{dy}{(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma}$$
$$= \frac{dz}{(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha};$$

combinées avec l'équation $dz = pdx + qdy$, ces dernières équations donneront

$$p[(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta]+q[(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma]$$
$$=(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution. On pourrait encore établir cette équation en exprimant que la normale menée à une semblable surface par un point quelconque (x, y, z), rencontre toujours l'axe de révolution. En effet, si l'on nomme ξ, η, ζ les coordonnées courantes de cet axe, on aura

$$\frac{\xi - x_0}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y_0}{\cos\beta} = \frac{\zeta - z_0}{\cos\gamma}.$$

D'ailleurs pour que la normale rencontre l'axe, il faut qu'un même système de valeurs de ξ, η, ζ satisfasse à ces équations et aux équations de la normale $\frac{x-\xi}{p} = \frac{y-\eta}{q} = \zeta - z$: or, si l'on substitue dans les équations de l'axe les valeurs de ξ et de η, tirées des équations de la normale, on trouvera

$$\frac{(x-x_0)-p(\zeta-z)}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0-q(\zeta-z)}{\cos6} = \frac{z-z_0+\zeta-z}{\cos\gamma}$$
$$= \frac{(x-x_0)(\cos6+q\cos\gamma)-(y-y_0)(\cos\alpha+p\cos\gamma)+(z-z_0)(p\cos6-q\cos\alpha)}{0},$$

ce qui exige que l'on ait

$$(x-x_0)(\cos6+q\cos\gamma)-(y-y_0)(\cos\alpha+p\cos\gamma) + (z-z_0)(p\cos6-q\cos\alpha) = 0.$$

217. Si l'on faisait mouvoir dans l'espace, non plus la ligne que déterminent les équations $v = c$, $w = \varphi(c)$, mais celles que déterminent les formules

$$f[x,y,z,c,\varphi(c),\chi(c),\psi(c),\ldots]=0,\ \mathrm{F}[x,y,z,c,\varphi(c),\chi(c)\ldots]=0,$$

la surface engendrée par le mouvement de cette ligne pourrait encore être représentée par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles qui ne renfermeraient pas les fonctions arbitraires φ, χ, ψ, etc. Seulement ces équations aux dérivées partielles seraient en général d'un ordre supérieur au premier. Ajoutons que pour les obtenir il suffit, dans les deux équations de la génératrice, de considérer z et c comme des fonctions des variables indépendantes x, y, puis d'éliminer les quantités

$$c,\ \frac{dc}{dx},\ \frac{dc}{dy},\ \frac{d^2c}{dx^2},\ \frac{d^2c}{dxdy},\ \frac{d^2c}{dy^2},\ \ldots$$
$$\varphi(c),\ \varphi'(c),\ \varphi''(c),\ \ldots\ \chi(c),\ \chi'(c),\ \chi''(c)\ldots$$

entre ces équations et celles qu'on en déduit par des différentiations relatives, soit à la variable x, soit à la varia-

ble y, en suivant la marche que nous avons indiquée dans la dix-neuvième leçon. On en conclura, 1° que si les équations de la génératrice renferment une seule fonction arbitraire $\varphi(c)$, l'élimination conduira à une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre; 2° que si les équations de la génératrice renferment deux fonctions arbitraires $\varphi(c)$, $\chi(c)$, l'élimination produira deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre; 3° que si les équations de la génératrice renferment trois fonctions arbitraires $\varphi(c)$, $\chi(c)$, $\psi(c)$, l'élimination conduira à trois équations aux dérivées partielles du cinquième ordre; 4° que dans le cas où les deux fonctions $\chi(c)$, $\psi(c)$ seront les dérivées première et seconde de la fonction $\varphi(c)$, l'élimination produira une seule équation aux dérivées partielles du second ordre, entre les variables x, y, z, de sorte que la surface décrite par la génératrice sera représentée par une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui ne renfermera plus la fonction φ ni ses dérivées. Parmi les surfaces de cette nature, on peut remarquer celles qui auront pour génératrice la normale principale d'une courbe à double courbure dont les équations seraient de la forme

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction donnée, et $\varphi(x)$ une fonction arbitraire.

218. 1er *Exemple:* Considérons la surface développable qui aurait pour génératrice les diverses tangentes que l'on peut mener à une courbe à double courbure. Si l'on représente par

$$x = \varphi(z), \quad y = \chi(z),$$

la courbe dont il s'agit, la droite qui touchera cette courbe au point dont les coordonnées seront

$$z = c, \quad x = \varphi(c), \quad y = \chi(c),$$

pourra être représentée par l'équation

$$\frac{x-\varphi(c)}{\varphi'(c)}=\frac{y-\chi(c)}{\chi'(c)}=z-c.$$

Pour obtenir l'équation finie de la surface développable engendrée par cette tangente, il faudra éliminer c entre ces deux équations, mais cette élimination ne pourra être effectuée qu'après la détermination des fonctions arbitraires $\varphi(c)$, $\chi(c)$, desquelles dépend la considération de la surface.

Soient maintenant p, q, r, s, t les valeurs des dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, que fournirait l'équation de la surface développable différentiée deux fois par rapport aux variables indépendantes x, y; la formule $dz=pdx+qdy$ devra être vérifiée par les valeurs de dx, dy, dz, tirées des équations de la tangente à la courbe donnée; or comme on tire de ces équations

$$\frac{dx}{\varphi'(c)}=\frac{dy}{\chi'(c)}=dz,$$

ou, puisque $\varphi'(c)$, $\chi'(c)$ sont proportionnels à

$$x-\varphi(c),\ y-\chi(c),\ z-c,\quad \frac{dx}{x-\varphi(c)}=\frac{dy}{y-\chi(c)}=\frac{dz}{z-c},$$

on trouvera définitivement

$$p\varphi'(c)+q\chi'(c)=1,\quad z-c=p[x-\varphi(c)]+q[y-\chi(c)].$$

Cette dernière équation appartiendra donc aussi à la surface développable, si l'on y regarde c comme une quantité variable déterminée par l'équation

$$p\varphi'(c)+q\chi'(c)=1.$$

Or dans ce cas si l'on différentie l'équation

$$z-c=p[x-\varphi(c)]+q[y-\chi(c)],$$

1° par rapport à x, 2° par rapport à y, les coefficients de

$\frac{dc}{dx}$ ou de $\frac{dc}{dy}$ seront égaux dans les deux membres, et l'on aura par suite

$$o = r[x - \varphi(c)] + s[y - \chi(c)], \quad o = s[x - \varphi(c)] + t[y - \chi(c)],$$

puis l'on conclura, en éliminant la quantité c,

$$rt = s^2.$$

Ainsi, quoique les équations de la génératrice d'une surface développable renferment deux fonctions arbitraires et leurs dérivées du premier ordre, cette surface peut être représentée par une équation aux dérivées partielles qui ne renferme plus de fonctions arbitraires, et qui soit du second ordre seulement.

2me *Exemple :* De la surface gauche engendrée par une droite qui glisse sur deux directrices quelconques

$$F(x, y, z) = o, \; f(x, y, z) = o \text{ et } F_1(x, y, z) = o, \; f_1(x, y, z) = o,$$

en restant constamment parallèle à un plan fixe.

Nous prendrons le plan directeur pour plan $\overline{xy}$. Dès-lors, pour construire la surface il suffira de couper les deux directrices par divers plans horizontaux et de joindre les points de section par des droites. La surface sera gauche en général, c'est-à-dire que deux positions consécutives de la génératrice ne seront pas dans le même plan. Les équations de la génératrice seront d'ailleurs de la forme $y = \alpha x + \beta$, $z = \gamma$. Pour que cette droite s'appuie constamment sur les deux directrices données, il faut de plus exprimer que les quatre équations

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma, \quad F(x, y, z) = o, \quad f(x, y, z) = o,$$

d'une part, et de l'autre les quatre équations

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma, \quad F_1(x, y, z) = o, \quad f_1(x, y, z) = o,$$

sont vérifiées par les mêmes valeurs de x, y, z. En éliminant x, y, z entre chacun de ces deux systèmes de quatre équations, on arrivera à deux équations de condi-

tion entre α, β, γ, qu'on peut mettre sous la forme

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \chi(\alpha).$$

Si l'on élimine α, β, γ entre ces dernières équations et celles de la génératrice, on aura pour l'équation générale des surfaces de cette espèce,

$$y = x\varphi(z) + \chi(z).$$

Pour obtenir l'équation aux dérivées partielles indépendantes des fonctions φ et χ, différentions successivement par rapport à x et à y, il viendra

$$0 = \varphi(z) + x\varphi'(z)p + \psi'(z)p, \quad 1 = x\varphi'(z)q + \psi'(z)q,$$

d'où l'on conclut, en divisant, $\frac{p}{q} = -\varphi(z)$. Comme il est arrivé ici que les fonctions φ', ψ, ψ' ont disparu à la fois, il suffira de descendre jusqu'au second ordre pour éliminer celle qui reste. Si, donc en adoptant les notations habituelles $\frac{d^2z}{dx^2} = r$, $\frac{d^2z}{dxdy} = s$, $\frac{d^2z}{dy^2} = t$, on différentie l'équation du premier ordre successivement par rapport à x et à y, il viendra

$$\frac{qr - ps}{q^2} = -\varphi'(z)p, \quad \frac{qs - pt}{q^2} = -\varphi'(z)q;$$

puis, en divisant ces deux résultats l'un par l'autre, on obtiendra pour l'équation commune à toutes les surfaces de ce genre,

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0.$$

Prenons pour exemple la surface engendrée par une droite mobile qui, demeurant horizontale, s'appuie constamment sur l'ellipse et sur le cercle représentés par les équations

$$x = h, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad x = k, \quad y^2 + z^2 = c^2.$$

Si l'on combine les équations de la génératrice

$$y = ax + \beta, \quad z = \gamma,$$

avec celles des deux directrices, on obtiendra les deux relations

$$\frac{\alpha h + \beta}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1, \quad (\alpha k + \beta)^2 + \gamma^2 = c^2,$$

et il s'agira d'éliminer α, β, γ, entre les quatre dernières équations.

Or si d'abord on élimine α, γ, il vient

$$\beta(h-x) + y = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}, \quad \beta(k-x) + y = \sqrt{c^2 - z^2},$$

d'où il résulte, en éliminant β entre celles-ci,

$$(h-x)\left(y - \sqrt{c^2 - z^2}\right) = (k-x)\left(y - \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}\right).$$

Cela posé, si l'on conserve le même signe aux radicaux dans les deux membres, ce sera exprimer que la droite mobile glisse sur les deux courbes en passant toujours par deux points situés d'un même côté du plan $\overline{zx}$, car ces radicaux sont les valeurs de l'ordonnée y dans les deux courbes; alors l'équation de la surface se réduit à

$$(h-k)\,cy = [(b-c)\,x + ch - bk]\sqrt{c^2 - z^2}$$

et représente un conoïde dont toutes les génératrices vont percer le plan $\overline{zx}$ en des points situés sur une même verticale placée en dehors des deux courbes, et que l'on obtiendrait par conséquent en faisant glisser la génératrice sur cette verticale et sur l'ellipse.

Lorsqu'on adoptera des signes différents pour les radicaux dans l'équation de la surface, elle conduira à un conoïde analogue, mais dont l'axe sera entre les deux courbes, parce qu'alors on exprimera que la génératrice traverse le plan $\overline{zx}$ entre les deux points où elle s'appuie sur la directrice.

Si avant d'éliminer β on n'avait pas résolu les deux équations qui contenaient cette indéterminée, on serait

tombé sur une équation du huitième degré qu'il aurait fallu décomposer en deux facteurs pour y reconnaître les deux surfaces distinctes que nous venons de signaler.

219. Cherchons encore l'équation de la surface gauche engendrée par une droite assujétie à glisser sur trois directrices quelconques. Les équations de la génératrice seront de la forme

$$x = \alpha z + \gamma, \quad y = \beta z + \delta,$$

et il faudra y joindre les conditions propres à exprimer que cette droite a toujours un point de commun avec chacune des directrices, ce qui fournira entre α, β, δ, γ trois relations de la forme

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \chi(\alpha), \quad \delta = \psi(\alpha),$$

puis il resterait à éliminer α, β, γ, δ entre les cinq équations précédentes. Or si d'abord on substitue pour β, γ, δ, leurs valeurs, il vient

$$x = \alpha z + \chi(\alpha), \quad y = z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha);$$

et quant à α, on ne peut l'éliminer sans déterminer la forme des fonctions, c'est-à-dire sans particulariser les directrices, de sorte que pour conserver au résultat toute sa généralité, il faut garder le système des deux équations qui précèdent en considérant α comme une indéterminée qu'on devra éliminer plus tard, quand la forme des fonctions aura été fixée. Si l'on voulait obtenir l'équation aux dérivées partielles indépendantes des directrices, il faudrait, en différentiant les deux équations

$$x = \alpha z + \chi(\alpha), \quad y = z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha),$$

se procurer assez d'équations pour pouvoir éliminer la quantité α et les fonctions φ, χ, ψ, ainsi que leurs dérivées. On y parviendrait ici en descendant seulement jusqu'au troisième ordre.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

Équations finies des lignes et des surfaces enveloppes.

---

220. Considérons une courbe tracée dans le plan $\overline{xy}$ et dont l'équation

$$u = 0$$

renferme avec les coordonnées x, y un paramètre variable a, en sorte qu'on ait

$$u = f(x, y, a).$$

Si l'on donne successivement à a une infinité de valeurs différentes, l'équation

$$f(x, y, a) = 0$$

représentera l'une après l'autre une infinité de courbes enveloppées par une courbe unique dont il s'agit de trouver l'équation. Pour y parvenir, j'observe d'abord que si l'élimination de a entre les deux équations

$$f(x, y, a) = 0, \quad f(x, y, a + \alpha) = 0,$$

produit la suivante

$$\chi(x, y, \alpha) = 0,$$

cette dernière formule résultera aussi de l'élimination de

a entre les deux équations

$$f(x, y, a-\alpha)=0, \quad f(x, y, a)=0,$$

et qu'en conséquence la courbe représentée par la formule $\chi(x, y, \alpha)=0$ renfermera les points d'intersection de la courbe représentée par l'équation $f(x, y, a)=0$ avec celles que représentent les formules

$$f(x, y, a-\alpha)=0, \quad f(x, y, a+\alpha)=0.$$

Les points d'intersection dont il s'agit étant évidemment très rapprochés l'un de l'autre lorsque α est très petit, si dans l'équation $\chi(x, y, \alpha)=0$ on fait $\alpha=0$, on obtiendra une nouvelle équation de la forme

$$\psi(x, y)=0,$$

qui représentera une courbe tangente à toutes celles qui répondent à la formule $f(x, y, a)=0$, et qu'on appelle la ligne d'enveloppe de toutes ces courbes. Il reste à former l'équation $\psi(x, y)=0$. Or si l'on désigne par ε un nombre qui soit très petit avec α, on pourra évidemment donner aux équations $f(x, y, a)=0$, $f(x, y, a+\alpha)=0$, la forme suivante :

$$u=0, \quad u+\alpha\left(\frac{du}{da}\pm\varepsilon\right)=0.$$

On peut en conclure que, pour obtenir la formule

$$\chi(x, y, \alpha)=0,$$

il suffira d'éliminer a entre les deux équations

$$u=0, \quad \frac{du}{da}\pm\varepsilon=0.$$

Si dans ces dernières on fait $\alpha=0$, et par suite $\varepsilon=0$, elles deviendront

$$u=0, \quad \frac{du}{da}=0,$$

et l'élimination de a produira l'équation de la courbe enveloppante.

Au reste, on peut s'assurer directement que les deux courbes représentées par l'équation $u = a$, 1° quand on suppose a constant, 2° quand on prend pour a une fonction de x et y déterminée par la formule

$$\frac{du}{da} = 0,$$

se touchent dans tous les points qui leur sont communs. En effet, pour tous ces points les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ tirées des équations des deux courbes sont évidemment les mêmes et sont données par une même équation $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$.

Applications. Si à la courbe qui a pour équation

$$y = \varphi(x),$$

on mène par le point dont l'abscisse est x, une tangente et une normale, les équations de ces deux droites seront respectivement

$$\eta - \varphi(x) - (\xi - x)\varphi'(x) = 0,$$
$$\xi - x + [\eta - \varphi(x)]\varphi'(x) = 0.$$

Par suite la tangente et la normale qui répondent au point dont l'abscisse est a seront représentées par les deux équations

$$y - \varphi(a) - (\xi - a)\varphi'(a) = 0,$$
$$\xi - a + [y - \varphi(a)]\varphi'(a) = 0.$$

Si entre la première de ces équations et sa dérivée prise par rapport à a, savoir,

$$\xi - a = 0,$$

on élimine la constante a, on obtiendra la formule

$$\eta - \varphi(\xi) = 0,$$

qui représente, comme on devait s'y attendre, la courbe proposée. Au contraire, si entre l'équation

$$\xi - a + [y - \varphi(a)]\varphi'(a) = 0$$

et sa dérivée prise par rapport à a, savoir,

$$[y - \varphi(a)]\varphi'' a - [1 + (\varphi' a)^2] = 0,$$

on élimine la constante a, on obtiendra l'équation non plus de la courbe proposée, mais de sa développée.

1er *Exemple :* Si par le point dont l'abscisse est a, on mène une tangente au cercle représenté par la formule

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

l'équation de cette tangente sera

$$ax + y\sqrt{\rho^2 - a^2} = \rho^2.$$

Si l'on élimine a entre cette équation et sa dérivée par rapport à a, savoir,

$$x - \frac{ay}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = 0,$$

on trouvera l'équation du cercle.

2me *Exemple.* Trouver l'enveloppe des ellipses représentées par des équations de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

quand on suppose $a + b = K$.

Solution. Si l'on différentie l'équation par rapport à la quantité a, en regardant b comme fonction de a, on aura

$$\frac{x^2}{a^3}da + \frac{y^2}{b^3}db = 0.$$

D'ailleurs $a + b = \mathrm{K}$ donne $da + db = 0$. Donc

$$\frac{x^2}{a^3} = \frac{y^2}{b^3}, \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{x^2}{a^2}\right)}{a} = \frac{\left(\frac{y^2}{b^2}\right)}{b} = \frac{1}{\mathrm{K}};$$

donc

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{x}{\mathrm{K}}, \quad \frac{y^3}{b^3} = \frac{y}{\mathrm{K}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{\mathrm{K}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\mathrm{K}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

221. Considérons la surface représentée par l'équation

$$f(x, y, z, a) = 0,$$

qui renferme avec les coordonnées x, y, z, la constante arbitraire a. Si l'on fait varier cette constante, la surface dont il s'agit changera de position, souvent même de forme, et traversera un espace terminé par une seconde surface qui touchera sans cesse la surface mobile. Cette seconde surface est ce qu'on nomme la surface *enveloppe*, tandis que les diverses surfaces représentées par l'équation $f(x, y, z, a) = 0$ et correspondantes aux diverses valeurs de la constante a, sont ce qu'on appelle les *enveloppées*.

Si dans l'équation $f(x, y, z, a) = 0$ on attribue successivement à la constante arbitraire trois valeurs différentes, mais très rapprochées, par exemple

$$a - \alpha, \quad a, \quad a + \alpha,$$

α désignant une quantité infiniment petite, on obtiendra trois enveloppées très voisines, et celle du milieu coupera les deux autres suivant deux courbes comprises dans une même surface, dont l'équation sera produite par l'élimination de la constante a entre les deux formules

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad f(x, y, z, a + \alpha) = 0.$$

En effet, soit

$$\chi(x, y, z, \alpha) = 0$$

l'équation dont il s'agit. La même équation résultera encore de l'élimination de α entre les deux formules

$$f(x, y, z, a-\alpha)=0, \quad f(x, y, z, a)=0.$$

Si l'on fait converger α vers la limite zéro, les deux surfaces se rapprocheront de plus en plus, et la surface représentée par l'équation $\chi(x, y, z, \alpha)=0$ finira par devenir tangente, quel que soit a, à l'enveloppée représentée par l'équation $f(x, y, z, a)=0$. Donc à la limite, c'est-à-dire lorsqu'on supposera $\alpha=0$, l'équation $\chi(x, y, z)=0$ deviendra précisément l'équation de la surface enveloppe.

Observons maintenant que, si l'on désigne par u la fonction $f(x, y, z, a)$, et par ε une quantité infiniment petite, les équations $f(x, y, z, a)=0$, $f(x, y, z+\alpha)=0$ deviendront

$$u=0, \quad u+\alpha\left(\frac{du}{da}\pm\varepsilon\right)=0.$$

Lorsque dans celles-ci on suppose $\alpha=0$, elles se réduisent à

$$u=0, \quad \frac{du}{da}=0.$$

C'est donc entre ces dernières qu'on devra éliminer a pour obtenir l'équation de la surface enveloppe.

Au reste, il est facile de s'assurer *à posteriori* que les deux surfaces représentées par l'équation $u=0$, 1° dans le cas où l'on attribue à la quantité a une valeur constante; 2° dans le cas où l'on considère a comme une fonction des variables x, y, z, assujétie à vérifier la formule $\frac{du}{da}=0$, sont tangentes l'une à l'autre dans tous les points qui leur sont communs. En effet, la direction de la normale à une surface courbe pour le point (x, y, z) se trouve détermi-

née par les valeurs des coefficients différentiels

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}.$$

D'ailleurs on tire de l'équation $u = 0$, en supposant a constant,

$$\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} = 0,$$

$$\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = 0;$$

puis, en supposant a variable et fonction de x, y,

$$\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} + \frac{du}{da}\frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} + \frac{du}{da}\frac{du}{dy} = 0.$$

Les valeurs de p et de q seront donc données pour un point situé sur la surface enveloppée par les premières valeurs de p et de q, et pour un point situé sur la surface enveloppe, par les secondes, qui, en vertu de l'équation $\frac{du}{da} = 0$, se réduisent aux deux précédentes. Donc, pour tout point situé à la fois sur les deux surfaces, les quantités p et q obtiendront précisément les mêmes valeurs; d'où il résulte que ces surfaces se toucheront dans tous les points communs à l'une et à l'autre.

222. Revenons aux deux courbes d'intersection de l'enveloppée qui correspond à l'équation $f(x, y, z, a) = 0$ avec celles que représentent les équations

$$f(x, y, z, a - \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, z, a + \alpha) = 0.$$

Lorsqu'on passe aux limites en faisant évanouir α, ces deux courbes se confondent en une seule qui est la courbe de contact de l'enveloppée représentée par l'équation

$f(x,y, z, a)=0$ avec la surface enveloppe. Cette courbe de contact est ce qu'on nomme la *caractéristique*. Pour former ses équations, il suffira de poser $\alpha = 0$ dans les formules

$$f(x,y,z,a)=0, \quad f(x,y,z,a\pm\alpha)=0;$$

on obtient alors, comme on l'a prouvé, les équations

$$u=0, \quad \frac{du}{da}=0.$$

Donc ces dernières, lorsqu'on y considère a comme constant, sont les équations mêmes de la caractéristique. Si l'on y donne successivement à la constante a diverses valeurs, on obtiendra diverses caractéristiques tracées sur diverses enveloppées.

Les courbes d'intersection de l'enveloppée

$$f(x,y,z,a)=0$$

avec les deux enveloppées que représentent les équations

$$f(x,y,z,a+\alpha)=0, \quad f(x,y,z,a-\alpha)=0,$$

se coupent, en général, en un point. Les coordonnées de ce point se trouvent déterminées par les trois équations

$$f(x,y,z,a-\alpha)=0, \quad f(x,y,z,a)=0, \quad f(x,y,z,a+\alpha)=0,$$

que l'on peut écrire comme il suit,

$$u-\alpha\frac{du}{da}+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{d^2u}{da^2}\pm\varepsilon\right)=0, \quad u=0,$$
$$u+\alpha\frac{du}{da}+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{d^2u}{da^2}\pm\varepsilon'\right)=0,$$

ε, ε' désignant, ainsi que α, des quantités infiniment petites. On peut encore, à ces équations, substituer les suivantes:

$$u=0, \quad \frac{du}{da}+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{d^2u}{da^2}\pm\varepsilon\right)=0, \quad \frac{d^2u}{da^2}\pm\frac{\varepsilon\pm\varepsilon'}{2}=0.$$

Si maintenant on passe aux limites en faisant évanouir α, les équations qui précèdent deviendront

$$u = 0, \quad \frac{du}{da} = 0, \quad \frac{d^2u}{da^2} = 0.$$

Ces dernières déterminent ce qu'on peut appeler le point commun à la caractéristique représentée par les équations $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$, et à une caractéristique infiniment voisine. Il existe un point de cette espèce sur chaque enveloppée. La suite des points semblables correspondants aux diverses enveloppées, ou, ce qui revient au même, aux diverses valeurs de a, constitue sur la surface enveloppe, une certaine courbe à laquelle on a donné le nom d'*arète de rebroussement*. Pour obtenir les deux équations de cette courbe en x, y, z, il suffit évidemment d'éliminer la constante arbitraire a entre les trois équations

$$u = 0, \quad \frac{du}{da} = 0, \quad \frac{d^2u}{da^2} = 0.$$

Donc les équations $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$, qui représentent une caractéristique particulière, lorsqu'on y suppose la quantité a constante, représentent au contraire l'arète de rebroussement, si l'on attribue à cette quantité une valeur variable propre à vérifier l'équation $\frac{d^2u}{da^2} = 0$.

Comme dans les deux hypothèses les équations $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ fournissent les mêmes valeurs de dx, dy, dz, ou plutôt les mêmes valeurs des rapports $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, nous devons conclure que tout point commun à l'arète de rebroussement et à une caractéristique, est pour ces deux courbes un point de contact.

223. 1re *Application :* Surface cylindrique droite à base circulaire.

Considérons le cercle représenté par la formule

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

et tracé dans le plan $\overline{xy}$. Si par le point dont l'abscisse est a, on mène une tangente à ce cercle, et par cette tangente un plan perpendiculaire au plan $\overline{xy}$, ce plan aura pour équation l'équation même de la tangente, savoir,

$$ax + y\sqrt{\rho^2 - a^2} = \rho^2.$$

Si l'on fait varier la valeur de a, le plan se mouvra de manière à toucher constamment la surface cylindrique droite qui a pour base le cercle donné. Donc, en vertu des principes ci-dessus établis, l'équation de cette surface cylindrique devra résulter de l'élimination de la constante a entre la formule $ax + y\sqrt{\rho^2 - a^2} = \rho^2$, et sa dérivée prise par rapport à la quantité a. Cette dérivée étant $x - \frac{ay}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = 0$, l'élimination donne pour résultat $x^2 + y^2 = \rho^2$, comme on devait s'y attendre.

Dans le cas présent, la caractéristique représentée par les équations $ax + y\sqrt{\rho^2 - a^2} = \rho^2$, $x - \frac{ay}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = 0$; sera la droite verticale qui résulte de l'intersection de deux plans infiniment voisins menés par deux tangentes perpendiculairement au plan $\overline{xy}$.

Comme les droites caractéristiques seront des droites parallèles, il n'y aura pas d'arète de rebroussement.

2me *Application :* Surface cylindrique à base quelconque.

Considérons un plan parallèle à l'axe des z et représenté par l'équation $y = ax + b$. Si l'on fait varier les

constantes a et b, ce plan deviendra mobile; et la loi de son mouvement sera déterminée si l'on établit une relation entre les deux constantes, en supposant par exemple $b = \varphi(a)$. Dans cette hypothèse, le plan mobile, dont l'équation prend la forme $y = ax + \varphi(a)$, touchera constamment une surface cylindrique qui pourra elle-même être représentée par l'équation $y = ax + \varphi(a)$, pourvu que l'on attribue à la quantité a, non plus une valeur constante, mais une valeur variable propre à vérifier la dérivée de l'équation $y = ax + \varphi(a)$ prise relativement à cette quantité, savoir, $x + \varphi'(a) = 0$.

Pour chaque valeur particulière de a, les équations $y = ax + \varphi(a)$ et $x + \varphi'(a) = 0$ réunies, détermineront une caractéristique qui sera évidemment une droite parallèle à l'axe des z. Cette droite, comprise tout entière dans la surface cylindrique, se confondra évidemment avec la génératrice de cette surface.

Comme les diverses caractéristiques seront des droites parallèles, il n'y aura pas d'arète de rebroussement.

224. 3me *Application* : Surface développable.

Considérons maintenant un plan quelconque représenté par l'équation $z = ax + by + c$. Si l'on fait varier les constantes a, b, c, mais en établissant des relations entre ces constantes, par exemple, en supposant $b = \varphi(a)$, $c = \chi(a)$, le plan deviendra mobile, et la loi de son mouvement sera complétement déterminée par la nature des deux fonctions φ et χ. La surface à laquelle le plan restera tangent dans toutes ses positions sera ce qu'on nomme une *surface développable.* D'après son mode de formation, il est clair que le plan mobile, supposé flexible et inextensible, pourra s'appliquer et se plier sur elle, sans duplicature ni solution de continuité, et réciproquement qu'on pourra, sans briser la surface, l'appliquer et la développer sur ce plan. La caractéristique de la sur-

face, qu'on peut aussi nommer sa génératrice, ne sera autre chose que la droite d'intersection de deux plans infiniment voisins. Les équations de cette droite seront l'équation même du plan mobile, savoir,

$$z = ax + y\varphi(a) + \chi(a),$$

et sa dérivée, prise relativement à la constante a, savoir,

$$0 = x + y\varphi'(a) + \chi'(a).$$

L'élimination de la constante a entre ces deux équations donnera pour résultat l'équation même de la surface développable.

Si l'on différentie de nouveau l'équation

$$0 = x + y\varphi'(a) + \chi'(a)$$

par rapport à la quantité a, on trouvera

$$0 = y\varphi''(a) + \chi''(a).$$

Les trois équations

$$z = ax + y\varphi(a) + \chi(a), \quad 0 = x + y\varphi'(a) + \chi'(a),$$
$$0 = y\varphi''(a) + \chi''(a),$$

déterminent, pour chaque valeur particulière de a, un point situé sur l'arète de rebroussement de la surface développable. Si entre les mêmes formules on élimine a, on obtiendra précisément les deux équations de cette arète de rebroussement. Ajoutons que si l'on effectue d'abord l'élimination entre les formules $z = ax + y\varphi(a) + \chi(a)$, $0 = x + y\varphi'(a) + \chi'(a)$, on trouvera pour première équation celle de la surface développable, qui passe effectivement par l'arète dont il s'agit.

On peut remarquer encore que, pour chaque valeur particulière de a, l'équation $0 = x + y\varphi'(a) + \chi'(a)$ représente un plan perpendiculaire au plan $\overline{xy}$ et passant par une caractéristique. Tous les plans de cette espèce touchent évidemment une certaine surface dévelop-

pable, et pour former l'équation de cette seconde surface il suffit d'éliminer a entre la formule

$$0 = x + y\varphi'(a) + \chi'(a)$$

et sa dérivée relative à la quantité a, c'est-à-dire entre les formules

$$0 = x + y\,\varphi'(a) + \chi'(a), \quad 0 = y\,\varphi''(a) + \chi''(a).$$

D'autre part il est clair qu'en opérant ainsi on obtiendra une seconde équation de l'arète de rebroussement. Donc cette arète est précisément la ligne d'intersection des deux surfaces développables.

A la formule $z = ax + y\,\varphi(a) + \chi(a)$ on pourrait substituer l'équation générale du plan osculateur d'une courbe donnée, ou du plan normal à cette courbe. Soient

$$y = \varphi(x), \quad z = \chi(x),$$

les deux équations de la courbe, et désignons par ξ, η, ζ les coordonnées variables du plan osculateur ou normal. L'équation du plan osculateur sera

$$-x)(dyd^2z - dzd^2y) + (\eta - y)(dzd^2x - dxd^2z) + (\zeta - z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0,$$

ou plus simplement

$$(\xi - x)[\varphi'(x)\chi''(x) - \varphi''(x)\chi'(x)] - (\eta - y)\chi''(x) + (\zeta - z)\varphi''(x) = 0,$$

tandis que l'équation du plan normal sera

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$

ou, en d'autres termes,

$$\xi - x + [\eta - \varphi(x)]\varphi'(x) + [\zeta - \chi(x)]\chi'(x) = 0.$$

En conséquence, les plans osculateur et normal, menés par le point dont l'abscisse est a, auront pour équations respectives

$$(\xi - a)[\varphi'(a)\chi''(a) - \varphi''(a)\chi'(a)] - [\eta - \varphi(a)]\chi''(a) + [\zeta - \chi(a)]\varphi''(a) = 0,$$

et

$$\xi - a + [\eta - \varphi(a)]\varphi' a + [\zeta - \chi(a)]\chi'(a) = 0.$$

Cherchons maintenant la surface développable qui touche constamment le plan osculateur. La caractéristique de cette surface sera représentée par l'équation

$$(\xi - a)[\varphi'(a)\chi''(a) - \varphi''(a)\chi'(a)] - [\eta - \varphi(a)]\chi''(a) + [\zeta - \chi(a)]\varphi''(a) = 0,$$

et par la dérivée de cette équation prise relativement à la quantité a, ou, ce qui revient au même, par les deux formules

$$\{(\xi - a)\varphi'(a) - [\eta - \varphi(a)]\}\chi''(a) - \{(\xi - a)\chi'(a) - [\zeta - \chi(a)]\}\varphi''(a) = 0,$$
$$\{(\xi - a)\varphi'(a) - [\eta - \ (a)]\}\chi'''(a) - \{(\xi - a)\chi'(a) - [\zeta - \chi(a)]\}\varphi'''(a) = 0.$$

Or ces deux équations équivalent aux deux suivantes

$$(\xi - a)\varphi'(a) - [\eta - \varphi(a)] = 0,$$
$$(\xi - a)\chi'(a) - [\zeta - \chi(a)] = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à la seule formule

$$\frac{\xi - a}{1} = \frac{\eta - \varphi(a)}{\varphi'(a)} = \frac{\zeta - \chi(a)}{\chi'(a)}.$$

Donc la caractéristique de la surface développable se confond avec la tangente à la courbe donnée. Il est aisé d'en conclure que l'arète de rebroussement de cette surface se confond avec la courbe elle-même. C'est aussi ce que démontre le calcul. En effet, les coordonnées d'un point quelconque de l'arète de rebroussement doivent satisfaire non-seulement aux équations

$$(\xi - a)\varphi'(a) - [\eta - \varphi(a)] = 0, \quad (\xi - a)\chi'(a) - [\zeta - \chi(a)] = 0;$$

mais encore aux dérivées de ces équations prises relativement à la quantité a. Or ces dérivées se réduisent l'une

et l'autre à

$$\xi - a = 0.$$

Si entre cette dernière formule et les équations

$$(\xi - a)\varphi'(a) - [\eta - \varphi(a)] = 0,$$
$$(\xi - a)\chi'(a) - [\zeta - \chi(a)] = 0,$$

on élimine a, on obtiendra les deux suivantes

$$\eta = \varphi(\xi), \quad \zeta = \chi(\xi),$$

c'est-à-dire précisément les équations de la courbe donnée. Quant à l'équation même de la surface développable qui touche constamment le plan osculateur, il est clair qu'elle résultera de l'élimination de la constante a entre les formules

$$(\xi - a)\varphi'(a) - [y - \varphi(a)] = 0,$$
$$(\xi - a)\chi'(a) - [\zeta - \chi(a)] = 0,$$

Passons à la recherche de la surface développable qui touche constamment le plan normal. La caractéristique de cette surface est représentée par l'équation

$$\xi - a + [y - \varphi(a)]\varphi'(a) + [\zeta - \chi(a)]\chi'(a) = 0,$$

jointe à sa dérivée

$$1 + [\varphi'(a)]^2 + [\chi'(a)]^2 = [y - \varphi(a)]\varphi''(a) + [\zeta - \chi(a)]\chi''(a).$$

Or, on satisfait à ces mêmes formules en prenant pour ξ, η, ζ les coordonnées du centre du cercle osculateur de la courbe proposée. Donc ce centre se trouve situé sur la droite avec laquelle se confond la caractéristique de la surface développable. J'ajoute que cette caractéristique et le rayon du cercle osculateur se coupent à angles droits. En effet, si par le point qui sur la courbe a pour abscisse la quantité a, on mène une parallèle à la caractéristique de la surface développable, cette parallèle sera représentée

par les deux équations

$$\xi - a + [\eta - \varphi(a)]\varphi'(a) + [\zeta - \chi(a)]\chi'(a) = 0,$$
$$[y - \varphi(a)]\varphi''(a) + [\zeta - \chi(a)]\chi''(a) = 0;$$

ou, ce qui revient au même, par la formule

$$\frac{\xi - a}{\varphi'(a)\chi''(a) - \varphi''(a)\chi'(a)} = \frac{\eta - \varphi(a)}{-\chi''(a)} = \frac{\zeta - \chi(a)}{\varphi''(a)}.$$

Donc cette parallèle sera perpendiculaire au plan osculateur, et par suite au rayon du cercle osculateur, autrement nommé rayon de courbure, ce qui entraîne la proposition énoncée.

Si entre les équations

$$\xi - a + [\eta - \varphi(a)]\varphi'(a) + [\zeta - \chi(a)]\chi'(a) = 0,$$
$$[y - \varphi(a)]\varphi''(a) + [\zeta - \chi(a)]\chi''(a) = 0,$$

on élimine la quantité a, on obtiendra précisément l'équation de la surface développable qui touche constamment le plan normal. Cette équation appartiendra en même temps à l'arète de rebroussement de la surface, et pour obtenir une seconde équation de cette arète, il suffira d'éliminer de nouveau la quantité a entre l'équation

$$1 + [\varphi'(a)]^2 + [\chi'(a)]^2 = [y - \varphi(a)]\varphi''(a) + [\zeta - \chi(a)]\chi''(a)$$

et sa dérivée prise relativement à cette quantité, savoir :

$$3[\varphi'(a)\varphi''(a) + \chi'(a)\chi''(a)] = [\eta - \varphi(a)]\varphi'''(a) + [\zeta - \chi(a)]\chi'''(a).$$

Nous avons vu que si x, y, z représentent les coordonnées d'un point quelconque de la développante, et ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque de la développée, on a

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$
$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Par conséquent si l'on élimine x, y, z entre ces dernières et les formules $y=\varphi(x)$, $z=\chi(x)$, on obtiendra en ξ, η, ζ, l'équation de la surface sur laquelle se trouvent situées toutes les développées de la courbe représentée par ces mêmes formules.

Or l'élimination dont il s'agit donne évidemment le même résultat que celle de la quantité a entre les formules

$$\xi - a + [y - \varphi(a)]\,\varphi'(a) + [\zeta - \chi(a)]\,\chi'(a) = 0,$$
$$1 + [\varphi'(a)]^2 + [\chi'(a)]^2 = [y - \varphi(a)]\,\varphi''(a) + [\zeta - \chi(a)]\,\chi''(a).$$

Donc la surface développable qui touche constamment le plan normal à une courbe quelconque, est en même temps le lieu de toutes ses développées. On arrive encore aux mêmes conclusions par les considérations suivantes.

Si l'on fait rouler sur une surface développable le plan tangent à cette surface, avec plusieurs droites menées par un point pris à volonté dans ce plan, pendant que le point décrira une courbe dans l'espace, chaque droite tracera évidemment sur la surface une développée de cette courbe. Donc la surface sera le lieu de toutes les développées, et le plan tangent, passant par les tangentes aux développées, ou, en d'autres termes, par plusieurs droites normales à la courbe décrite, se confondra nécessairement avec le plan normal à cette courbe.

225. 4me *Application :* Surface qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère dont le rayon demeure constant et dont le centre se meut sur une ligne donnée.

Supposons d'abord que le centre de la sphère se meuve sur l'axe des x; si l'on désigne par a l'abscisse de ce centre, l'équation de la sphère mobile sera de la forme

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = \rho^2,$$

et si à cette équation on joint sa dérivée prise relative-

ment à la quantité a, savoir,

$$x - a = 0,$$

on obtiendra les deux équations de la caractéristique de la surface enveloppe. L'élimination de a donne, pour l'équation de cette même surface,

$$y^2 + z^2 = \rho^2;$$

donc la surface enveloppe sera, comme on devait s'y attendre, un cylindre droit qui aura pour axe l'axe des x, et pour base un cercle décrit d'un rayon ρ égal à celui de la sphère.

Les différentes caractéristiques étant des cercles parallèles, compris dans des plans perpendiculaires à l'axe des x, il n'y aura pas d'arète de rebroussement.

Supposons, en second lieu, que le centre de la sphère se meuve sur une courbe plane tracée dans le plan $\overline{xy}$. Si l'on désigne par

$$y = \varphi(x)$$

l'équation de cette courbe, celle de la sphère mobile sera de la forme

$$(x - a)^2 + [y - \varphi(a)]^2 + z^2 = \rho^2;$$

si à cette équation l'on joint sa dérivée par rapport à a, savoir :

$$x - a + [y - \varphi(a)]\,\varphi'(a) = 0,$$

on obtiendra les deux équations qui représentent la caractéristique de la surface qui touche constamment la sphère mobile, et que l'on nomme *surface canal*. Enfin, si aux équations

$$(x - a)^2 + [y - \varphi(a)]^2 + z^2 = \rho^2,\ x - a + [y - \varphi(a)]\varphi'(a) = 0,$$

on réunit la dérivée de la dernière par rapport à a, savoir,

$$1 + [\varphi'(a)]^2 - [y - \varphi(a)]\,\varphi''(a) = 0,$$

on aura en tout trois équations qui détermineront les coordonnées d'un point situé sur l'arète de rebroussement de la surface canal. L'équation de cette surface résultera de l'élimination de a entre les formules

$$(x-a)^2+[y-\varphi(a)]^2+z^2=\rho^2,\ x-a+[y-\varphi(a)]\varphi'(a)=0.$$

Quant aux équations de l'arète de rebroussement, il suffira pour les obtenir de joindre à l'équation de la surface canal celle que l'on obtient en éliminant a, entre les deux équations

$$x-a+[y-\varphi(a)]\varphi'(a)=0,\ 1+[\varphi'(a)]^2-[y-\varphi(a)]\varphi''(a)=0$$

Cette élimination conduira à l'équation d'une surface cylindrique verticale, dont l'intersection avec la surface canal sera précisément l'arète dont il s'agit.

Supposons, en troisième lieu, que le centre de la sphère se meuve sur une courbe à double courbure représentée par les deux équations

$$y=\varphi(x),\quad z=\chi(x);$$

la sphère mobile, représentée par la formule

$$(x-a)^2+[y-\varphi(a)]^2+[z-\chi(a)]^2=\rho^2,$$

parcourra un espace dont l'enveloppe sera encore une *surface canal*. De plus, comme la dérivée de cette dernière équation relative à la quantité a, savoir,

$$x-a+[y-\varphi(a)]\varphi'(a)+[z-\chi(a)]\chi'(a)=0,$$

est l'équation même du plan normal à la courbe décrite par le centre de la sphère mobile, il est clair que la caractéristique de la surface canal sera précisément le cercle qui résulte de l'intersection de ce plan normal avec la sphère. Si entre les formules

$$(x-a)^2+[y-\varphi(a)]^2+[z-\chi(a)]^2=\rho^2,$$
$$x-a+[y-\varphi(a)]\varphi'(a)+[z-\chi(a)]\chi'(a)=0,$$

on élimine a, on obtiendra l'équation de la surface canal. Si l'on élimine la même quantité a entre l'équation

$$x - a + [y - \varphi(a)]\varphi'(a) + [z - \chi(a)]\chi'(a) = 0$$

et sa dérivée relative à a, savoir,

$$1 + [\varphi'(a)]^2 + [\chi'(a)]^2 = [y - \varphi(a)]\varphi''(a) + [z - \chi(a)]\chi''(a),$$

on obtiendra l'équation de la surface développable, que touche constamment le plan normal à la courbe des centres. Enfin, toutes les fois que la surface canal sera rencontrée par la surface développable, la courbe d'intersection de ces deux surfaces sera l'arête de rebroussement de la première.

QUARANTIÈME LEÇON.

Équations aux dérivées partielles des surfaces enveloppées et des surfaces enveloppes.

---

226. Considérons la surface représentée par l'équation $u = 0$, et supposons d'abord que la fonction u renferme, avec les coordonnées x, y, z, les deux paramètres a et $b = \varphi(a)$; en sorte qu'on ait, par exemple,

$$u = f[x, y, z, a, \varphi(a)].$$

Si l'on fait varier la constante a, la surface dont il s'agit deviendra mobile, et parcourra un espace dont l'enveloppe sera une nouvelle surface représentée par l'équation qui résulte de l'élimination de a entre les deux suivantes

$$u = 0, \quad \frac{du}{da} = 0.$$

Cela posé, on reconnaît facilement que les équations

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = 0,$$

appartiennent à l'une des surfaces enveloppées, lorsqu'on attribue à la quantité a une valeur constante, et à la surface enveloppe, lorsqu'on attribue à la quantité a une valeur variable propre à vérifier la formule $\frac{du}{da} = 0$.

Donc, si entre ces trois équations

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = 0,$$

on élimine a et $\varphi(a)$, on obtiendra une équation aux dérivées partielles en x, y, z, p, q, qui appartiendra en même temps à la surface enveloppe et à chacune des surfaces enveloppées.

Exemple : Supposons que la surface représentée par l'équation $u = 0$ soit une sphère dont le rayon ρ demeure constant et dont le centre se meuve sur une courbe comprise dans le plan $\overline{xy}$. L'équation $u = 0$ sera de la forme

$$(x-a)^2 + [y - \varphi(a)]^2 + z^2 = \rho^2.$$

Dans la même hypothèse, les deux dernières équations

$$\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = 0,$$

se réduiront à

$$x - a + pz = 0, \quad y - \varphi(a) + qz = 0.$$

Cela posé, l'élimination de a et de $\varphi(a)$ entre les formules

$$(x-a)^2 + [y - \varphi(a)]^2 + z^2 = \rho^2,$$
$$x - a + pz = 0, \quad y - \varphi(a) + qz = 0,$$

produira l'équation aux dérivées partielles

$$(p^2 + q^2 + 1)z^2 = \rho^2,$$

qui appartiendra non-seulement à la sphère mobile, mais encore à la surface canal circonscrite à toutes les sphères.

Supposons maintenant que l'équation $u = 0$ renferme avec les coordonnées x, y, z, les trois paramètres a, $b = \varphi(a)$ et $c = \chi(a)$, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$u = f[x, y, z, a, \varphi(a), \chi(a)].$$

Si l'on fait varier la constante a, la surface représentée par l'équation $u=0$ deviendra mobile, et pour cette surface mobile, ainsi que pour la surface enveloppe de l'espace qu'elle traverse, les valeurs de x, y, z, p, q satisferont à la fois aux trois équations

$$u=0,\quad \frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz}=0,\quad \frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0.$$

Supposons, que ces mêmes équations étant résolues par rapport aux paramètres a, $\varphi(a)$ et $\chi(a)$, on en tire

$$a=\mathrm{U},\quad \varphi(a)=\mathrm{V},\quad \chi(a)=\mathrm{W},$$

U, V, W étant fonctions des seules variables x, y, z, p, q, et par suite

$$\mathrm{V}=\varphi(\mathrm{U}),\quad \mathrm{W}=\chi(\mathrm{U}),\quad \mathrm{W}=\psi(\mathrm{V}).$$

On pourra donc obtenir, dans le cas que l'on considère, trois équations aux dérivées partielles du premier ordre, dont chacune appartiendra également à la surface mobile et à l'enveloppe de l'espace qu'elle parcourt. Pour former ces mêmes équations, il suffira d'établir une liaison arbitraire entre deux quelconques des trois quantités variables U, V, W. Par conséquent, chacune des équations dont il s'agit renfermera une fonction arbitraire. Telles sont effectivement les fonctions φ, χ, ψ dans les formules précédentes : $\mathrm{V}=\varphi(\mathrm{U})$, $\mathrm{W}=\chi(\mathrm{U})$, $\mathrm{W}=\psi(\mathrm{V})$.

Au reste, comme la fonction arbitraire $\chi(a)$ peut être censée déduite d'une équation de la forme

$$\varpi[a, \varphi(a), \chi(a)]=0,$$

la caractéristique ϖ indiquant elle-même une fonction arbitraire, il est clair que pour la surface enveloppe et pour chacune des enveloppées, les valeurs de x, y, z, p, q satisferont encore à l'équation aux dérivées partielles

$$\varpi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})=0.$$

Cette dernière équation comprend les formules

$$V = \varphi(U), \quad W = \chi(U), \quad W = \psi(V)$$

comme cas particuliers.

Si l'on différentie l'une de ces équations

$$V = \varphi(U), \quad W = \chi(U), \quad W = \psi(V), \quad \varpi(U, V, W) = 0,$$

1° par rapport à x, 2° par rapport à y, on obtiendra deux équations qui renfermeront les dérivées des fonctions φ, χ, ψ ou ϖ, et desquelles on pourra déduire, par l'élimination de ces dérivées, une équation aux dérivées partielles du second ordre. Ainsi, par exemple, en différentiant l'équation $V = \varphi(U)$, 1° par rapport à x, 2° par rapport à y, on trouvera

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}p + \frac{dV}{dp}r + \frac{dV}{dq}s = \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}p + \frac{dU}{dp}r + \frac{dU}{dq}s\right)\varphi'(U),$$
$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}q + \frac{dV}{dp}s + \frac{dV}{dq}t = \left(\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}q + \frac{dU}{dp}s + \frac{dU}{dq}t\right)\varphi'(U);$$

et l'on aura par suite, en éliminant $\varphi'(U)$,

$$\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}p + \frac{dV}{dp}r + \frac{dV}{dq}s\right)\left(\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}q + \frac{dU}{dp}s + \frac{dU}{dq}t\right)$$
$$= \left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}q + \frac{dV}{dp}s + \frac{dV}{dq}t\right)\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}p + \frac{dU}{dp}r + \frac{dU}{dq}s\right);$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}p\right)\left(\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}q\right) - \left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}q\right)\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}p\right)$$
$$+ \left[\frac{dV}{dp}\left(\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}q\right) - \frac{dU}{dp}\left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}q\right)\right]r + \Big[\frac{dU}{dq}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}p\right) - \frac{dV}{dq}\Big(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}$$
$$+ \Big[\frac{dV}{dq}\left(\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}q\right) - \frac{dU}{dq}\left(\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}q\right) + \frac{dU}{dp}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dz}p\right) - \frac{dV}{dp}\Big(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}p$$
$$+ \left(\frac{dV}{dp}\frac{dU}{dq} - \frac{dV}{dq}\frac{dU}{dp}\right)(rt - s^2) = 0.$$

La formule précédente est l'équation aux dérivées partielles du second ordre, qui appartient en même temps à la surface enveloppe et à chacune des enveloppées. Cette équation ne renferme plus de fonction arbitraire, et elle a cela de remarquable, qu'elle est linéaire par rapport aux quatre quantités r, s, t, $rt - s^2$.

On pourrait tirer immédiatement des équations

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = 0,$$

une formule équivalente. En effet, si l'on différentie la seconde et la troisième de ces équations, 1° par rapport à x, 2° par rapport à y, en y considérant a comme une fonction des variables x et y, on trouvera

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz}p + \frac{d^2u}{dz^2}p^2 + \frac{du}{dz}r + \left(\frac{d^2u}{dxda} + p\frac{d^2u}{dzda}\right)\frac{da}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dxdz}q + \frac{d^2u}{dydz}p + \frac{d^2u}{dz^2}pq + \frac{du}{dz}s + \left(\frac{d^2u}{dxda} + p\frac{d^2u}{dzda}\right)\frac{da}{dy} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dxdz}q + \frac{d^2u}{dydz}p + \frac{d^2u}{dz^2}pq + \frac{du}{dz}s + \left(\frac{d^2u}{dyda} + q\frac{d^2u}{dzda}\right)\frac{da}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dydz}q + \frac{d^2u}{dz^2}q^2 + \frac{du}{dz}t + \left(\frac{d^2u}{dyda} + q\frac{d^2u}{dzda}\right)\frac{da}{dy} = 0.$$

Or on conclura des quatre équations qui précèdent, 1° en combinant la première avec la quatrième

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz}p + \frac{d^2u}{dz^2}p^2 + \frac{du}{dz}r\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dydz}q + \frac{d^2u}{dz^2}q^2 + \frac{du}{dz}t\right)$$
$$= \left(\frac{d^2u}{dxda} + p\frac{d^2u}{dzda}\right)\left(\frac{d^2u}{dyda} + q\frac{d^2u}{dzda}\right)\frac{da}{dx}\frac{da}{dy};$$

2° en combinant la seconde avec la troisième,

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dxdz}q + \frac{d^2u}{dydz}p + \frac{d^2u}{dz^2}pq + \frac{du}{dz}s\right)^2$$
$$= \left(\frac{d^2u}{dxda} + p\frac{d^2u}{dzda}\right)\left(\frac{d^2u}{dyda} + q\frac{d^2u}{dzda}\right)\frac{da}{dx}\frac{da}{dy}.$$

On aura donc par suite

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}+2p\frac{d^2u}{dxdz}+p^2\frac{d^2u}{dz^2}+r\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}+2q\frac{d^2u}{dydz}+q^2\frac{d^2u}{dz^2}+t\frac{du}{dz}\right)$$
$$-\left(\frac{d^2u}{dxdy}+p\frac{d^2u}{dydz}+q\frac{d^2u}{dxdz}+pq\frac{d^2u}{dz^2}+s\frac{du}{dz}\right)^2=0,$$

ou, en développant,

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}+2p\frac{d^2u}{dxdz}+p^2\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}+2q\frac{d^2u}{dydz}+q^2\frac{d^2u}{dz^2}\right)-\left(\frac{d^2u}{dxdy}+p\frac{d^2u}{dydz}+q\frac{d^2u}{dxdz}+pq\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2$$
$$+\frac{du}{dz}\left[r\left(\frac{d^2u}{dy^2}+2q\frac{d^2u}{dydz}+q^2\frac{d^2u}{dz^2}\right)-2s\left(\frac{d^2u}{dxdy}+p\frac{d^2u}{dydz}+q\frac{d^2u}{dxdz}+pq\frac{d^2u}{dz^2}\right)+t\left(\frac{d^2u}{dx^2}+2p\frac{d^2u}{dxdz}+p^2\frac{d^2u}{dz^2}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{du}{dz}\right)^2(rt-s^2)=0.$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement qu'elle est linéaire par rapport aux quatre quantités variables r, s, t, $rt-s^2$. Si de cette dernière formule on élimine a, $\varphi(a)$ et $\chi(a)$ par le moyen des équations

$$u=0,\quad \frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz}=0,\quad \frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0,$$

on obtiendra entre x, y, z, p, q, r, s, t une équation aux dérivées partielles du second ordre qui ne différera pas de la formule déjà obtenue.

1er *Exemple.* Supposons que l'équation $u=0$ soit celle d'un plan et se réduise à $z=ax+y\varphi(a)+\chi(a)$, les formules

$$u=0,\quad \frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz}=0,\quad \frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0,$$

deviendront

$$p=a,\quad q=\varphi(a).$$

En les combinant avec l'équation

$$z=ax+y\varphi(a)+\chi(a),$$

on en conclura

$$z-px-qy=\chi(a).$$

On aura donc, dans le cas présent,

$$U = p, \quad V = q, \quad W = z - px - qz.$$

Par suite les valeurs de x, y, z, p, q, relatives soit au plan mobile, soit à la surface qui le touche constamment, vérifieront les équations aux dérivées partielles

$$q = \varphi(p), \quad z - px - qy = \chi(p), \quad z - px - qy = \psi(q),$$
$$\varpi(p,\ q,\ z - px - qy) = 0.$$

Si l'on différentie la première de ces équations, 1° par rapport à x, 2° par rapport à y, on en tirera successivement

$$s = r\varphi'(p), \quad t = s\varphi'(p),$$

puis, en éliminant $\varphi'(p)$,

$$rt = s^2.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui convient à toutes les surfaces développables.

Lorsque dans l'équation

$$u = 0$$

les variables x, y, z sont séparées, on a

$$\frac{d^2u}{dydz} = 0, \quad \frac{d^2u}{dzdx} = 0, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0;$$

et par suite l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdz} + p^2\frac{d^2u}{dz^2}\Big)\left(\frac{d^2u}{dy^2} + 2q\frac{d^2u}{dydz} + q^2\frac{d^2u}{dz^2}\right) - \left(\frac{d^2u}{dxdy} + p\frac{d^2u}{dydz} + q\frac{d^2u}{dxdz} + pq\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2$$
$$\left[r\left(\frac{d^2u}{dy^2} + 2q\frac{d^2u}{dydz} + q^2\frac{d^2u}{dz^2}\right) - 2s\left(\frac{d^2u}{dxdy} + p\frac{d^2u}{dydz} + q\frac{d^2u}{dxdz} + pq\frac{d^2u}{dz^2}\right) + t\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdz} + p^2\frac{d^2u}{dz^2}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{du}{dz}\right)^2 (rt - s^2) = 0$$

éduit à

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} + p^2\frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2u}{dz^2} + q^2\frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$+ \frac{du}{dz}\left[r\left(\frac{d^2u}{dy^2} + q^2\frac{d^2u}{dz^2}\right) - 2pqs\frac{d^2u}{dz^2} + t\left(\frac{d^2u}{dx^2} + p^2\frac{d^2u}{dz^2}\right)\right] + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 (rt - s^2) = 0.$$

Si l'on suppose en outre que l'équation $u=0$ soit linéaire par rapport à x, y, z, on aura encore

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=0,\quad \frac{d^2u}{dz^2}=0;$$

ce qui réduit l'équation précédente à $rt-s^2=0$.

2me *Exemple :* Supposons que l'équation $u=0$ soit celle d'une sphère décrite d'un rayon constant ρ, et se réduise à

$$(x-a)^2+[y-\varphi(a)]^2+[z-\chi(a)]^2=\rho^2;$$

les deux formules

$$u=0,\quad \frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz}=0,\quad \frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0,$$

deviendront

$$x-a+[z-\chi(a)]p=0,\quad y-\varphi(a)+[z-\chi(a)]q=0.$$

En combinant celle-ci avec l'équation de la sphère, on trouvera

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-\varphi(a)}{q}=\frac{z-\chi(a)}{-1}=\pm\frac{\rho}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

et par suite

$$a=x\mp\rho\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\varphi(a)=y\mp\rho\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\chi(a)=z\pm\rho\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

On aura donc, dans le cas présent,

$$\mathrm{U}=x\mp\frac{\rho p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\mathrm{V}=y\mp\frac{\rho q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\mathrm{W}=z\pm\frac{\rho}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Il en résulte que les valeurs de x, y, z, p, q, relatives, soit à la sphère mobile, soit à la surface canal qui enveloppe l'espace traversé par cette sphère, vérifieront les équations aux dérivées partielles

$$y \mp \frac{\rho q}{\mathrm{R}} = \varphi\left(x \mp \frac{\rho p}{\mathrm{R}}\right),$$

$$z \pm \frac{\rho}{\mathrm{R}} = \chi\left(x \mp \frac{\rho p}{\mathrm{R}}\right),$$

$$z \pm \frac{\rho}{\mathrm{R}} = \psi\left(y \mp \frac{\rho q}{\mathrm{R}}\right),$$

R désignant, pour abréger, le radical $\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$.

Quant à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} + p^2\frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2u}{dz^2} + q^2\frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$+\frac{du}{dz}\left[r\left(\frac{d^2u}{dy^2} + q^2\frac{d^2u}{dz^2}\right) - 2pqs\frac{d^2u}{dz^2} + t\left(\frac{d^2u}{dx^2} + p^2\frac{d^2u}{dz^2}\right)\right] + \left(\frac{du}{dz}\right)^2(rt - s^2) = 0,$$

elle prendra, dans le cas présent, une forme très simple. En effet, en vertu des équations

$$\frac{du}{dx} = 2(x-a),\quad \frac{du}{dy} = 2[y - \varphi(a)],\quad \frac{du}{dz} = 2[z - \chi(a)],$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2,\qquad \frac{d^2u}{dy^2} = 2,\qquad \frac{d^2u}{dz^2} = 2,$$

elle se réduit à

$$p^2+q^2+1+[(q^2+1)r - 2pqs + (p^2+1)t][z-\chi(a)] + (rt - s^2)[z-\chi(a)]^2 = 0.$$

Si l'on remet au lieu de $z - \chi(a)$ sa valeur tirée de la formule

$$\frac{x-a}{p} = \frac{y-\varphi(a)}{q} = \frac{z-\chi(a)}{-1} = \pm\frac{\rho}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

et que l'on fasse, pour plus de commodité, $\mathrm{R} = \sqrt{p^2+q^2+1}$,

on aura définitivement

$$p^2+q^2+1\mp[(q^2+1)r-2pqs+(p^2+1)t]\frac{\rho}{\mathrm{R}}+(rt-s^2)\frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}=0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(p^2+q^2+1)\frac{\mathrm{R}^2}{\rho^2}\mp[(q^2+1)r-2pqs+(p^2+1)t]\frac{\mathrm{R}}{\rho}+rt-s^2=0.$$

On obtiendrait précisément la même formule en substituant dans l'équation qui donne les rayons de courbure principaux

$$(p^2+q^2+1)\mathrm{Q}^2\pm[(p^2+1)t-2pqs+(q^2+1)r]\mathrm{Q}+rt-s^2=0,$$

au lieu de la quantité Q, sa valeur $\pm\frac{\mathrm{R}}{\rho}$ tirée de l'équation $\mp\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$. Or, dans l'équation qui donne les rayons de courbure principaux, ρ désigne un rayon de plus grande ou de moindre courbure, tandis que dans l'équation aux dérivées partielles qui précède, ρ désigne le rayon de la sphère mobile; donc il résulte de cette formule, qu'en chaque point de la surface qui enveloppe l'espace parcouru par la sphère mobile, l'un des rayons de plus grande ou de moindre courbure est égal au rayon de la sphère dont il s'agit.

227. On peut déterminer les fonctions arbitraires que renferme l'équation d'une enveloppée, de manière que la surface enveloppe passe par des directrices données, ou soit circonscrite à des surfaces données.

Soit toujours $u=0$ l'équation de l'enveloppée mobile, et supposons d'abord que la fonction u renferme avec les coordonnées x, y, z les deux paramètres a et $\varphi(a)$. Pour déterminer la fonction φ, il suffira de supposer que l'enveloppe doit passer par une directrice donnée ou être cir-

conscrite à une surface donnée. Soient, dans la première hypothèse, $v = 0$, $w = 0$, les équations de la directrice. Cette directrice devant être tangente à chacune des enveloppées; les valeurs de dx, dy, dz, tirées de ses équations, devront satisfaire à la différentielle de l'équation $u = 0$, et par suite on aura, pour chaque point de la directrice, non-seulement les équations $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, mais encore la formule

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dz} + \frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dx} = 0.$$

Si entre ces quatre équations on élimine x, y, z, on obtiendra une équation de condition entre a et $\varphi(a)$, que je représenterai par $A = 0$, et qui déterminera la forme de la fonction φ. Si, à l'aide de cette équation de condition, on élimine de la fonction $u=0$ le paramètre $\varphi(a)$, l'équation résultante représentera une surface déterminée pour chaque valeur particulière de la quantité a, et en faisant varier cette quantité, on aura une surface enveloppe également déterminée.

Supposons maintenant que l'enveloppe doive être circonscrite à une surface donnée représentée par l'équation $v = 0$. Cette dernière surface sera tangente à chacune des enveloppées, et, comme deux surfaces qui se touchent en un point ont nécessairement en ce point la même normale, il est clair que les coordonnées x, y, z, du point de contact, vérifieront non-seulement les équations $u=0$, $v = 0$, mais encore la formule

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{dv}{dy}} = \frac{\frac{du}{dz}}{\frac{dv}{dz}}.$$

Si entre ces quatre dernières équations on élimine x, y, z,

on obtiendra encore une équation de la forme $A = 0$, A étant une fonction des deux paramètres a et $\varphi(a)$. La nature de la fonction φ étant déterminée par la formule $A = 0$, on achèvera le calcul comme dans l'hypothèse précédente. Si l'équation $u=0$ renfermait trois paramètres a, $\varphi(a)$ et $\chi(a)$, alors, pour déterminer les deux fonctions φ et χ, il faudrait connaître deux directrices de la surface enveloppe, ou deux surfaces courbes auxquelles cette surface enveloppe doit être circonscrite. En opérant comme ci-dessus, 1° pour la première directrice, ou la première surface courbe donnée; 2° pour la seconde directrice, ou la seconde surface courbe, on obtiendrait deux équations

$$A = 0, \quad B = 0,$$

dont les premiers membres A et B renfermeraient seulement les trois paramètres a, $\varphi(a)$, $\chi(a)$. Ces deux équations suffiraient donc à la détermination des fonctions φ et χ.

La même méthode peut être évidemment étendue au cas où l'équation $u = 0$ renfermerait plus de trois paramètres dépendants les uns des autres.

228. Cherchons par cette méthode l'équation de la surface développable qui passe par deux directrices données. Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de la première directrice, et par x_2, y_2, z_2 celles de la seconde. Soient $v_1 = 0$, $w_1 = 0$, les équations de la première directrice, et $v_2 = 0$, $w_2 = 0$, celles de la seconde. Enfin, concevons que les points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), se trouvent sur une même caractéristique ou génératrice de la surface développable, et désignons par x, y, z les coordonnées variables de cette génératrice. Le plan qui touchera la surface développable suivant cette génératrice, passera par les tangentes aux deux directrices. Par suite, si la perpendiculaire à ce plan forme avec les axes les angles

λ, μ, ν, on aura simultanément

$$(x_1 - x_2)\cos\lambda + (y_1 - y_2)\cos\mu + (z_1 - z_2)\cos\nu = 0,$$
$$\cos\lambda dx_1 + \cos\mu dy_1 + \cos\nu dz_1 = 0,$$
$$\cos\lambda dx_2 + \cos\mu dy_2 + \cos\nu dz_2 = 0.$$

On en conclura

$$(x_1 - x_2)(dy_1 dz_2 - dy_2 dz_1) + (y_1 - y_2)(dz_1 dx_2 - dz_2 dx_1) + (z_1 - z_2)(dx_1 dy_2 - dx_2 dy_1) = 0.$$

Cette dernière équation, lorsqu'on y substitue pour dx_1, dy_1, dz_1, dx_2, dy_2, dz_2, leurs valeurs tirées des formules $v_1 = 0$, $w_1 = 0$, $v_2 = 0$, $w_2 = 0$, établit une relation nouvelle entre les six coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Si aux formules précédentes on réunit les équations de la génératrice de la surface développable, lesquelles se trouvent comprises dans la formule

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

on aura en tout sept équations entre les quantités

$$x, y, z, \quad x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2;$$

et si l'on élimine les six dernières, on obtiendra en x, y, z l'équation même de la surface développable.

229. De la surface développable circonscrite à deux surfaces données.

Désignons par x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, les coordonnées variables de deux surfaces données; et soient $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ leurs équations respectives. Si les points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), se trouvent sur une même génératrice de la surface développable, les normales menées aux surfaces données par ces deux points seront perpendiculaires au plan qui touche la surface développable suivant la gé-

nératrice dont il s'agit; et l'on exprimera que ces normales sont non-seulement parallèles entre elles, mais encore perpendiculaires à la génératrice, en posant les trois équations comprises dans les formules

$$\frac{\frac{dv_1}{dx_1}}{\frac{dv_2}{dx_2}} = \frac{\frac{dv_1}{dy_1}}{\frac{dv_2}{dy_2}} = \frac{\frac{dv_1}{dz_1}}{\frac{dv_2}{dz_2}},$$

$$(x_1 - x_2)\frac{dv_1}{dx_1} + (y_1 - y_2)\frac{dv_1}{dy_1} + (z_1 - z_2)\frac{dv_1}{dz_1} = 0.$$

Si entre les formules qui précèdent et les équations de la génératrice, savoir,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

on élimine les six quantités x_1; y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, on obtiendra en x, y, z l'équation même de la surface développable.

Si l'on se proposait seulement de trouver la courbe de contact de la surface développable avec l'une des deux surfaces données, par exemple avec la première, il suffirait de joindre à l'équation $v_1 = 0$ celle qui résulte de l'élimination des coordonnées x_2, y_2, z_2 entre l'équation $v_2 = 0$ et les formules

$$\frac{\frac{dv_1}{dx_1}}{\frac{dv_2}{dx_2}} = \frac{\frac{dv_1}{dy_1}}{\frac{dv_2}{dy_2}} = \frac{\frac{dv_1}{dz_1}}{\frac{dv_2}{dz_2}},$$

$$(x_1 - x_2)\frac{dv_1}{dx_1} + (y_1 - y_2)\frac{dv_1}{dy_1} + (z_1 - z_2)\frac{dv_1}{dz_1} = 0.$$

Exemple : Surface développable circonscrite à deux

sphères ou à deux ellipsoïdes semblables, dont les axes sont parallèles.

Calcul pour deux sphères. Soient

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=\rho^2,\ (x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2=\rho_0^2,$$

les équations des deux sphères.

On aura

$$\frac{x_1}{x_2-x_0}=\frac{y_1}{y_2-y_0}=\frac{z_1}{z_2-z_0},\quad x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=\rho^2.$$

On en conclura

$$\frac{x_2-x_0}{x_1}=\frac{y_2-y_0}{y_1}=\frac{z_2-z_0}{z_1}=\pm\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{\rho^2-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)}{\rho^2},$$

et par suite

$$x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1=\rho(\rho\pm\rho_0).$$

La dernière équation est celle d'un plan qui renferme la courbe de contact de la surface développable avec la première des sphères données.



QUARANTE-UNIÈME LEÇON.

Principes élémentaires du calcul des résidus.

1. Lorsqu'une fonction $f(x)$ de la variable x ne devient pas infinie pour une valeur particulière x_1, on peut la développer suivant les puissances ascendantes entières et positives de la différence $x - x_1 = \varepsilon$, et l'on trouve, en faisant usage de la formule de Taylor,

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\left(\frac{x-x_1}{1.2}\right)^2 f''(x_1)\ldots+\frac{(x-x_1)^n}{1.2.3\ldots n}f^n[x_1+\theta(x-x_1)]$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x_1+\varepsilon)=f(x_1)+\varepsilon f'(x_1)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}f''(x_1)\ \ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\varepsilon^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{n-1}(x_1)+\frac{\varepsilon^n}{1.2.3..n}f^{(n)}(x_1+\theta\varepsilon).$$

Alors aussi le coefficient de la première puissance de $x - x_1$, ou de ε, est la valeur que prend le cofficient différentiel ou la dérivée de la fonction $f(x)$, quand on y fait $x = x_1$.

Mais si la fonction $f(x)$ devient infinie pour $x = x_1$, ou si x_1 est une racine de l'équation $f(x) = \infty$, $\frac{1}{f(x)} = 0$, on ne peut plus faire usage du développement qui précède, et l'on est forcé de lui en substituer un autre,

toujours ordonné suivant les puissances ascendantes de ε, mais qui renferme des puissances négatives. Ce développement s'obtient très facilement en procédant comme il suit.

2. La valeur particulière x_1 peut être une racine simple ou multiple de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$; x_1 sera une racine simple, et l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$ sera dite n'avoir qu'une seule racine égale à x_1, lorsque le produit $(x - x_1) f(x)$ ne deviendra pas infini pour $x = x_1$. On dit, au contraire, que x_1 est une racine multiple de l'ordre m, m désignant un nombre entier, ou que l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$ a m racines égales à x_1, lorsque le produit $(x - x_1)^m f(x)$ obtient pour $x = x_1$ une valeur finie différente de zéro.

Posons, dans cette dernière hypothèse, qui renferme la première comme cas particulier,

$$(x - x_1)^m f(x) = \mathrm{f}(x), \qquad \varepsilon^m f(x_1 + \varepsilon) = \mathrm{f}(x_1 + \varepsilon);$$

la fonction $\mathrm{f}(x)$ conservant une valeur finie pour $x = x_1$, on pourra développer $\mathrm{f}(x_1 + \varepsilon)$ suivant les puissances ascendantes et positives de ε, et l'on aura

$$\mathrm{f}(x_1+\varepsilon) = \mathrm{f}(x_1) + \varepsilon \mathrm{f}'(x_1) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{f}''(x_1) \ldots + \frac{\varepsilon^{m-1}\mathrm{f}^{m-1}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{\varepsilon^m \mathrm{f}^m(x_1 + \theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m},$$

d'où l'on tire, en divisant par ε^m, et ayant égard à l'équation $f(x_1 + \varepsilon) = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon^m}$,

$$f(x_1+\varepsilon) = \frac{\mathrm{f}(x_1)}{\varepsilon^m} + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\mathrm{f}'(x_1) + \frac{1}{\varepsilon^{m-2}}\frac{\mathrm{f}''(x_1)}{1.2} + \frac{1}{\varepsilon^{m-3}}\frac{\mathrm{f}'''(x_1)}{1.2.3} \ldots$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{f}^{m-1}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{\mathrm{f}^m(x_1+\theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m}.$$

Si m est égal à l'unité, ou si x est une racine simple de

l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$, cette équation devient

$$f(x_1 + \varepsilon) = \frac{\mathrm{f}(x_1)}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{f}'(x_1)}{1} + \frac{\varepsilon \mathrm{f}''(x_1)}{1.2} + \ldots.$$

Dans tous les cas le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ est ce que M. Cauchy a appelé le *résidu* de la fonction $f(x)$, correspondant à la valeur particulière x_1 de la variable x. Ce résidu sera donc, dans l'hypothèse d'une racine simple, $\mathrm{f}(x_1)$; dans l'hypothèse d'une racine multiple, $\frac{\mathrm{f}^{m-1}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$, et l'on pourra toujours le calculer, en formant la fonction

$$\mathrm{f}(x) = (x - x_1)^m f(x),$$

que l'on différentiera ensuite $m - 1$ fois, pour y faire $x = x_1$. $\mathrm{f}^{m-1}(x_1)$ est évidemment aussi ce que devient

$$\mathrm{f}^{(m-1)}(x_1 + \varepsilon) = \frac{d^{m-1}\mathrm{f}(x_1 + \varepsilon)}{d\varepsilon^{m-1}}$$

lorsqu'on y fait $\varepsilon = 0$. L'équation $\mathrm{f}(x_1 + \varepsilon) = \varepsilon^m f(x_1 + \varepsilon)$ donne d'ailleurs

$$\frac{d^{m-1}\mathrm{f}(x_1 + \varepsilon)}{d\varepsilon^{m-1}} = \frac{d[\varepsilon^m f(x_1 + \varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}};$$

'on aura donc

$$\mathrm{f}^{(m-1)}(x_1) = \lim. \mathrm{f}^{(m-1)}(x_1 + \varepsilon) = \lim. \frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(x_1 + \varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}},$$

$$\frac{\mathrm{f}^{m-1}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \lim. \frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(x_1 + \varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}},$$

de sorte que le résidu de la fonction $f(x)$, relatif à $x = x_1$, est ce que devient l'expression

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(x_1 + \varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}}$$

lorsque, après la différentiation, on pose $\varepsilon = 0$.

3. *Exemple :* 1° Soit

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)};$$

cette fonction devient infinie pour $x = 1$, mais le produit

$$(x-1)f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} = \mathrm{f}(x)$$

conserve une valeur finie. Le résidu de la fonction $f(x)$, correspondant à $x = 1$, sera dès-lors $\mathrm{f}(1)$ ou $\frac{1+1}{1+1} = 1$. Le résidu de cette même fonction, correspondant à $x = -1$, s'obtiendra en formant le produit

$$(x+1)f(x) = \frac{x^2+1}{x-1},$$

et faisant $$x = -1,$$

ce qui donnera $$\frac{2}{-2} = -1.$$

2[me] *Exemple :* $$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Cette fonction devient infinie pour $x = \frac{\pi}{2}$; mais le produit $\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$, qui prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, conserve néanmoins pour $x = \frac{\pi}{2}$ une valeur finie que l'on obtient en prenant la dérivée du numérateur et du dénominateur. Cette valeur finie et égale à l'unité est le résidu de la fonction $\frac{1}{\cos x}$ correspondant à $x = \frac{\pi}{2}$.

3[me] *Exemple :*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2};$$

on a

$$(x+1)^2 f(x) = x^2 - 1 = \mathrm{f}(x), \quad \mathrm{f}'(x) = 2x, \quad \mathrm{f}'(-1) = -2,$$

et -2 est le résidu de cette fonction relatif à $x = -1$.

4. Lorsqu'une fonction $f(x)$ devient infinie pour une série de valeurs particulières $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, on peut prendre le résidu, ou successivement par rapport à toutes les racines, ou partiellement par rapport à quelques-unes seulement. On appelle résidu intégral de la fonction $f(x)$ la somme des résidus de cette fonction relatifs aux diverses racines réelles et imaginaires de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$. L'extraction des résidus est l'opération par laquelle on les déduit de la fonction proposée. On indique cette extraction à l'aide de la lettre initiale $\mathcal{E}$, qui sera considérée comme une nouvelle caractéristique analogue aux caractéristiques d, $\int$, Σ ; et pour exprimer le résidu intégral de $f(x)$, on place la lettre $\mathcal{E}$ devant la fonction entourée de doubles parenthèses, ainsi qu'il suit :

$$\mathcal{E}((f(x))).$$

Pour indiquer le résidu, par rapport à une valeur particulière $x = x_1$, on remplacera la fonction $f(x)$ par la fonction identique

$$\frac{(x-x_1)f(x)}{(x-x_1)} \quad \text{ou} \quad \frac{(x-x_1)^m f(x)}{(x-x_1)^m},$$

et l'on mettra entre deux parenthèses, sous le signe $\mathcal{E}$, la différence $(x-x_1)$ ou $(x-x_1)^m$ placée au dénominateur ; le résidu sera donc indiqué par l'une des notations

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}, \quad \mathcal{E}\frac{(x-x_1)^m f(x)}{(((x-x_1)^m))}.$$

Pour indiquer le résidu pris par rapport à certaines valeurs particulières x_1, x_2, x_3, ..., on se servirait de la notation

$$\mathcal{E}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f(x)}{((\,(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,))}.$$

Lorsque la fonction $f(x)$ se présentera sous la forme fractionnaire $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}$, et que nous voudrons indiquer la somme des résidus relatifs aux racines de l'équation $\chi(x)=0$, nous écrirons

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\chi(x)))},$$

appliquant ainsi les doubles parenthèses à la fonction $\chi(x)$. Au contraire, la notation

$$\mathcal{E}\frac{((\varphi(x)))}{\chi(x)}$$

représentera la somme des résidus de $f(x)$ relatifs aux seules racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, et l'on aura identiquement

$$\mathcal{E}((f(x)))=\mathcal{E}\left(\left(\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}\right)\right)=\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\chi(x)))}+\mathcal{E}\frac{((\varphi(x)))}{\chi(x)}.$$

De même, si l'on suppose $\chi(x)=\lambda(x)\mu(x)$, les deux notations

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\lambda(x)))\mu(x)},\quad \mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{\lambda(x)((\mu(x)))},$$

exprimeront, la première la somme des résidus correspondants aux racines de l'équation $\lambda(x)=0$, et la seconde la somme des résidus qui correspondent aux racines de

l'équation $\mu(x)=0$; en sorte qu'on aura généralement

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\lambda(x)\mu(x)))}=\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\lambda(x)))\mu(x)}+\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\mu(x)))\lambda(x)}.$$

De même encore, si l'on suppose $\varphi(x)=\gamma(x)\varpi(x)$, on obtiendra les équations

$$\mathcal{E}\frac{((\gamma(x)\varpi(x)))}{\chi(x)}=\mathcal{E}\frac{((\gamma(x)))\varpi(x)}{\chi(x)}+\mathcal{E}\frac{\gamma(x)((\varpi(x)))}{\chi(x)},$$

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}\right)\right)=\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((\lambda(x)))\mu(x)}+\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{\lambda(x)((\mu(x)))}$$
$$+\mathcal{E}\frac{((\gamma(x)))\varpi(x)}{\chi(x)}+\mathcal{E}\frac{\gamma(x)((\varpi(x)))}{\chi(x)}.$$

5. Si la fonction $f(x)$ est la somme ou la différence de plusieurs fonctions $\varphi(x)$, $\chi(x)$, il est évident, d'après la définition même du résidu et du résidu intégral, que le résidu intégral de la somme de ces fonctions sera égal à la somme de leurs résidus intégraux ; on aura donc

$$\mathcal{E}((\varphi(x)\pm\chi(x)\pm\text{etc.}))=\mathcal{E}((\varphi(x)))\pm\mathcal{E}((\chi(x)))\pm\ldots\text{ etc.}$$

6. Si la fonction $f(x)$ est le produit d'une autre fonction $\mathrm{F}(x)$ par un facteur constant a, on aura aussi

$$\mathcal{E}((a\mathrm{F}(x)))=a\,\mathcal{E}((\mathrm{F}(x))).$$

Cette dernière équation est un cas particulier de celle que nous avons établie plus haut,

$$\mathcal{E}((\gamma(x)\varpi(x)))=\mathcal{E}((\gamma(x)))\varpi(x)+\mathcal{E}\gamma(x)((\varpi(x))),$$

équation qui correspond à l'équation différentielle

$$d.uv=udv+vdu.$$

7. Soit, de plus, $f(x,z)$ une fonction des deux variables indépendantes x, z, et supposons que l'équation

$\frac{1}{f(x, z)} = 0$, résolue par rapport à x, fournisse des racines indépendantes de la variable z; si l'on désigne par x_1 l'une de ces racines, il est clair que le résidu de la fonction dérivée $\frac{df(x, z)}{dx}$, correspondant à $x = x_1$, ne différera pas de la dérivée relative à z du résidu de la fonction $f(x, z)$; car ces deux quantités se réduiront l'une et l'autre au coefficient du rapport $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ dans le développement de l'expression $f(x_1 + \varepsilon, z + \varepsilon')$, suivant les puissances ascendantes des accroissements ε, ε'.

En effet, pour avoir le résidu de la fonction $f(x, z)$, correspondant à $x = x_1$, il faut poser $x = x_1 + \varepsilon$ et prendre dans le développement de $f(x_1 + \varepsilon, z)$, le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$; puis, pour avoir la différentielle de ce résidu, il faut, dans ce coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$, changer z en $z + \varepsilon'$, développer et prendre le coefficient de ε' qui sera évidemment le coefficient de $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ dans le développement de

$$f(x_1 + \varepsilon, \; z + \varepsilon').$$

De même, pour avoir le résidu de la différentielle, il faut d'abord dans $f(x, z)$ changer z en $z + \varepsilon'$, prendre le coefficient de ε', y changer x en $x_1 + \varepsilon$, et développer; le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ sera le résidu cherché et sera aussi le coefficient de $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ dans le développement de $f(x_1 + \varepsilon, z + \varepsilon')$; donc, etc.

Cette remarque pouvant s'étendre aux diverses racines de l'équation $\frac{1}{f(x, z)} = 0$ que l'on suppose indépendantes

de la variable z, on en conclura

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{df(x,z)}{dz}\right)\right) = \frac{d\,\mathcal{E}((f(x,z)))}{dz},$$

c'est-à-dire que le résidu intégral de la différentielle est égal à la différentielle du résidu intégral.

Nous conclurons plus tard de ce théorème que l'intégrale du résidu est égale au résidu de l'intégrale.

8. Ce que nous venons de dire sur les principes du calcul des résidus suffit. Il reste à faire connaître une de ses principales applications.

Application à la transformation d'une fonction qui devient infinie pour certaines valeurs, et à la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

En supposant que la fonction $f(x)$ devienne infinie pour $x = x_1$, mais de telle sorte que le produit $(x - x_1)^m f(x) = \mathrm{f}(x)$ conserve une valeur finie, nous avons trouvé

$$f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{(x-x_1)^m} = \frac{\mathrm{f}(x_1)}{(x-x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{\mathrm{f}'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{\mathrm{f}''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}} \cdots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(x_1)}{(x-x_1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots m}\mathrm{f}^{(m)}[x_1 + \theta(x-x_1)].$$

Posons

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}\mathrm{f}^{(m)}[x_1 + \theta(x - x_1)] = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ aura généralement pour $x = x_1$ une valeur finie $\frac{\mathrm{f}^{(m)}(x_1)}{1.2.3\ldots m}$, et par conséquent, en retranchant de la fonction $f(x)$ la somme

$$\frac{\mathrm{f}(x_1)}{(x-x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{\mathrm{f}'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{\mathrm{f}''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}} \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(x_1)}{(x-x_1)},$$

on obtiendra une nouvelle fonction $\varphi(x)$, qui ne deviendra plus infinie pour $x=x_1$; or cette somme de fractions peut, à l'aide du calcul des résidus, se mettre sous une forme très simple.

En effet, on a évidemment, d'après ce que nous avons dit sur les résidus et la manière de les calculer,

$$f(x_1)=\mathcal{E}\frac{f(x)}{(x-x_1)},\quad \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}=\mathcal{E}\frac{f(x)}{(((x-x_1)^m))};$$

d'où l'on tire, en posant $m-1=n$, $x=z$,

$$\frac{f^{(n)}(x_1)}{1.2.3\ldots n}=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)^{n+1}))}.$$

Si, dans cette dernière équation, on fait tour à tour

$$n=1,\ n=2,\ n=3,\ \ldots n=m-1,$$

on trouvera

$$f(x_1)=\mathcal{E}\frac{f(z)}{((z-x_1))},\quad \frac{f'(x_1)}{1}=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)^2))},$$
$$\frac{f''(x_1)}{1.2}=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)^3))},\ \ldots\ \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}=\mathcal{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)^m))}.$$

Dès lors l'équation

$$f(x)=\frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m}+\ \ldots\ +\varphi(x)$$

devient

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-\dfrac{1}{(x-x_1)^m}\mathcal{E}\dfrac{f(z)}{((z-x_1))}-\dfrac{1}{(x-x_1)^{m-1}}\mathcal{E}\dfrac{f(z)}{(((z-x_1)^2))} \\ -\dfrac{1}{(x-x_1)^{m-2}}\mathcal{E}\dfrac{f(z)}{(((z-x_1)^3))}\ldots-\dfrac{1}{x-x_1}\mathcal{E}\dfrac{f(z)}{(((z-x_1)^m))} \end{array}\right\}=\varphi(x).$$

En faisant entrer sous le signe $\mathcal{E}$, qui se rapporte à z, les quantités $\frac{1}{(x-x_1)^m}$, $\frac{1}{(x-x_1)^{m-1}}$, ... qu'on peut regar-

der comme constantes, réduisant au même dénominateur et observant que le résidu de la somme est égal à la somme des résidus, on obtiendra successivement

$$f(x) - \mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}[(z-x_1)^{m-1}+(x-x_1)(z-x_1)^{m-2}+(x-x_1)^2(z-x_1)^{m-3}\ldots+(x-x_1)^{m-1}]$$

$$f(x) - \mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}\left[\frac{(x-x_1)^m-(z-x_1)^m}{(x-x_1)-(z-x_1)}\right] = \varphi(x),$$

$$f(x) - \mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} + \mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)(z-x_1)^m}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))(x-z)} = \varphi(x).$$

Le second des résidus du premier membre, ou le résidu de la fonction

$$\frac{\mathrm{f}(z)(z-x_1)^m}{(x-x_1)^m(z-x_1)^m(x-z)} = \frac{\mathrm{f}(z)}{(x-x_1)^m(x-z)},$$

relatif à $z = x_1$, est évidemment nul, puisque cette fonction ne devient pas infinie pour $z = x_1$; on a donc plus simplement

$$f(x) - \mathcal{E}\frac{\mathrm{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} = \varphi(x),$$

ou, en mettant pour $\mathrm{f}(z)$ sa valeur $f(z)(z-x_1)^m$,

$$f(x) - \mathcal{E}\frac{f(z)(z-x_1)^m}{(x-z)(((z-x_1)^m))} = f(x) - \mathcal{E}\frac{f(z)(z-x_1)}{(x-z)((z-x_1))} = \varphi(x).$$

Il résulte de cette dernière équation que, pour déduire de la fonction $f(x)$, qui devient infinie lorsqu'on suppose $x = x_1$, une autre fonction qui conserve dans la même hypothèse une valeur finie, il suffit de retrancher de $f(x)$ une somme de fractions rationnelles équivalentes à l'expression $\mathcal{E}\frac{f(z)(z-z_1)}{(x-z)((z-x_1))}$, c'est-à-dire au résidu de la fonction $\frac{f(z)}{(x-z)}$ relatif à $z = x_1$.

9. Concevons maintenant que l'on veuille déduire de la fonction $f(x)$ une autre fonction qui ne devienne infinie pour aucune des racines x_1, x_2, ... x_n de l'équation $f(x) = \infty$, $\frac{1}{f(x)} = 0$, il suffira évidemment de retrancher de $f(x)$ la somme des résidus de la fonction $\frac{f(z)}{x-z}$ correspondant aux valeurs $z = x_1$, $z = x_2$,... qui peuvent rendre cette fonction infinie, ou le résidu intégral de cette fonction représenté par la notation $\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$; donc si l'on pose

$$f(x) - \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z} = \varphi(x),$$

la fonction $\varphi(x)$ conservera une valeur finie pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de la variable x. On pourra donc toujours décomposer une fonction donnée en deux parties, dont l'une soit la somme de fractions rationnelles, et dont l'autre ne devienne jamais infinie.

10. Dans le cas particulier où $f(x)$ désigne une fraction rationnelle, la fonction $\varphi(x)$, qui est ce qu'on obtient quand de la fonction donnée on retranche une série de fractions rationnelles, ne peut être qu'une fraction de même espèce, mais qui ne puisse jamais devenir infinie, ou dont le dénominateur ne puisse jamais s'évanouir. Dès-lors le dénominateur de $\varphi(x)$ doit être constant, et $\varphi(x)$ ne peut être qu'une fonction entière de x.

De plus, si dans la fraction rationnelle $f(x) = \frac{F(x)}{\mathrm{F}(x)}$ le degré du dénominateur surpasse le degré du numérateur, cette fonction s'évanouira pour des valeurs infinies de x, ainsi que l'expression $\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$. Il devra donc en être aussi de même de la fonction entière $\varphi(x)$. Mais une

fonction entière qui s'évanouit pour $x = \infty$ doit être identiquement nulle. On aura donc, dans cette hypothèse,

$$\varphi(x) = 0, \quad f(x) = \mathcal{E} \frac{((f(z)))}{(x - z)};$$

à l'aide de cette formule, on pourra décomposer, dans tous les cas possibles, la fraction rationnelle $f(x)$ en fractions simples.

11. *Exemples.* 1° $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)}$,

on aura

$$f(x) = \mathcal{E} \frac{1}{(x-z)(((z-1)^2))(z+1)} + \mathcal{E} \frac{1}{(x-z)(z-1)^2((z+1))}.$$

Pour calculer le premier résidu, il faut multiplier la fonction sous le signe $\mathcal{E}$ par $(z - 1)^2$, différentier, et faire $z = 1$. On trouve de cette manière

$$\mathcal{E} \frac{1}{(x-z)(((z-1)^2))(z+1)} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2};$$

on trouve plus facilement encore

$$\mathcal{E} \frac{1}{(x-z)(z-1)^2((z+1))} = \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)},$$

on aura donc

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}.$$

2°. $\qquad f(x) = \dfrac{\mathrm{f}(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}$,

on trouvera

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)} = \mathcal{E} \frac{\mathrm{f}z}{((z-x_1))(z-x_2)\ldots(z-x_m)} \frac{1}{x-z} + \ldots$$
$$+ \mathcal{E} \frac{\mathrm{f}(z)}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots((z-x_m))} \frac{1}{x-z} = \frac{\mathrm{f}(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} \frac{1}{(x-}$$
$$+ \frac{\mathrm{f}(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)} \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{\mathrm{f}(x_m)}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})} \frac{1}{x-x_m},$$

et par suite

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} f(x_1) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})} f(x_m).$$

Cette dernière équation est la formule d'interpolation de Lagrange.

12°. Reprenons l'équation $f(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$.

Si après avoir multiplié ses deux membres par x, on attribue à la variable x une valeur infinie, et si l'on désigne par F la valeur correspondante du produit $xf(x)$, on aura

$$xf(x) = \mathcal{E}\frac{((f(z)))}{1-\frac{z}{x}},$$

et en passant à la limite,

$$F = \mathcal{E}((f(z))).$$

Si la quantité F s'évanouit, on aura simplement

$$\mathcal{E}((f(z))) = 0.$$

Cette dernière formule subsistera toutes les fois que dans la fraction rationnelle, désignée par $f(x)$, la différence entre le degré du dénominateur et celui du numérateur sera supérieure à l'unité; alors, en effet, dans le produit $xf(x) = \frac{x\varphi(x)}{\chi(x)}$, le degré du dénominateur est encore plus grand que celui du numérateur, et ce produit s'évanouira par conséquent quand on fera $x = \infty$.

Si la quantité F était égale à l'unité, ce qui aurait lieu par exemple si dans la fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}$, le degré du dénominateur surpassait d'une unité seulement le degré du numérateur, et si de plus les coefficients de la

plus haute puissance de x au numérateur et au dénominateur étaient égaux, on aurait

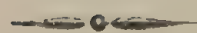
$$\mathcal{E}\,((f(z))) = 1.$$

Exemple : $\quad f(x) = \dfrac{x^n}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)};$

on aura

$$\mathcal{E}\,((f(z))) = \frac{x_1^n}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)} + \frac{x_2^n}{(x_2-x_1)\ldots(x_2-x_m)} + \frac{x_m^n}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-})};\ldots$$

la somme du second membre sera égale à 0 si $n < m-1$, et égale à l'unité si $n = m-1$, ce qu'on savait déjà.



QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

Principes élémentaires du calcul direct aux différences finies.

Soit $y = f(x)$ une fonction quelconque de la variable x, et h un accroissement quelconque attribué à cette variable; $f(x+h) - f(x)$ est ce qu'on appelle la différence finie de la fonction y; on désigne cette même différence par la notation Δy, ou $\Delta f(x)$; en sorte qu'on a, en supposant

$$(1)\quad y = f(x), \qquad (2)\quad \Delta y = f(x+h) - f(x).$$

Lorsqu'on suppose $y = x$, l'équation précédente devient

$$\Delta x = h.$$

La différence finie de la variable x n'est donc autre chose que l'accroissement h attribué à cette même variable.

Si l'on prend successivement pour y différentes fonctions de x, on obtiendra pour Δy autant de valeurs correspondantes qui seront fonctions de x et de h. On trouvera, par exemple, en supposant

$$y = x + a, \ldots \Delta y = h,$$
$$y = ax, \ldots\ldots \Delta y = a(x+h) - ax = ah,$$
$$y = a^x, \ldots\ldots \Delta y = a^{x+h} - a^x = (a^h - 1)a^x,$$
$$y = e^{ax}, \ldots\ldots \Delta y = e^{a(x+h)} - e^{ax} = (e^{ah} - 1)e^{ax},$$
$$y = \sin ax, \ldots \Delta y = \sin(ax + ah) - \sin ax = 2\sin\left(\frac{ah}{2}\right)\cos\left(ax + \frac{ah}{2}\right),$$
$$y = \mathrm{l}x, \ldots\ldots \Delta y = \mathrm{l}(x+h) - \mathrm{l}x = \mathrm{l}\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Enfin si l'on prend $y = x^m$, m désignant un nombre entier, on trouvera

$$\Delta y = (x+h)^m - x^m = \frac{m}{1} h x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 x^{m-2} + \ldots + \frac{m}{1} h^{m-1} x + h^m.$$

Les différences finies des fonctions de fonctions, des fonctions composées, se déduiront avec la même facilité de l'équation (2). On peut même faire à ce sujet quelques remarques qu'il importe de retenir.

Soi ent d'abord

$$y = au, \qquad u = \mathrm{F}(x),$$

u désignant une fonction de la variable x, et a une quantité constante; on aura

$$\Delta y = a\mathrm{F}(x+h) - a\mathrm{F}(x) = a[\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)] = a\Delta u.$$

Soient, en second lieu,

$$y = u + v + w + \ldots \text{etc.}, \; u = \mathrm{F}(x), \; v = F(x), \; w = f(x) \ldots,$$

u, v, w désignant diverses fonctions de la variable x, on trouvera

$$\begin{aligned}\Delta y = \mathrm{F}(x+h) + F(x+h) + f(x+h) + \ldots \\ - \mathrm{F}(x) - F(x) - f(x) - \ldots = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots\end{aligned}$$

Enfin si l'on suppose

$$y = au + bv + cw + \ldots,$$

u, v, w désignant des fonctions de la variable x, et a, b, c des quantités constantes, on trouvera encore de la même manière

$$\Delta y = a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w + \ldots.$$

Si l'on prend pour y un polynome entier du degré n, ou si l'on fit

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots\ldots + kx + l,$$

on aura

$$\Delta y = a\Delta.x^n + b\Delta.x^{n-1} + \ldots\ldots + k\Delta x.$$

D'ailleurs $\Delta.x^n, \Delta.x^{n-1}, \ldots \Delta x$ sont des fonctions rationnelles de x et de h, dont une seulement, savoir, $\Delta.x^n$, est par rapport à x du degré $n - 1$, les autres étant d'un degré inférieur. La différence finie d'un polynome en x du degré n est donc un nouveau polynome en x du degré $n-1$.

Revenons maintenant à l'équation générale

$$\Delta y = f(x+h) - f(x);$$

lorsque l'on considère l'accroissement de la variable x comme une quantité constante, la valeur de Δy déterminée par cette équation est une nouvelle fonction de x. La différence finie de cette nouvelle fonction, savoir $\Delta.\Delta y$, est ce qu'on appelle la différence finie du second ordre de la fonction y; on la désigne, pour abréger, par $\Delta^2 y$. De même, la différence finie de $\Delta^2 y$ est ce qu'on appelle la différence finie du troisième ordre de la fonction y; on la désigne, pour abréger, par $\Delta^3 y$, et ainsi de suite. En général, lorsqu'on a pris n fois de suite la différence finie de la fonction y, le résultat est ce qu'on appelle la différence finie du $n^{\text{ième}}$ ordre de la fonction y, et s'indique par la notation $\Delta^n y$. On a donc

$$\Delta^2 y = \Delta.\Delta y, \quad \Delta^3 y = \Delta.\Delta^2 y = \Delta\Delta\Delta y \quad \text{et} \quad \Delta^n y = \Delta.\Delta^{n-1} y.$$

Les différences finies des divers ordres d'une fonction y s'obtiennent avec la même facilité que la différence finie du premier ordre, et peuvent quelquefois s'exprimer d'une manière très simple. Supposons par exemple $y = a^x$.

En prenant plusieurs fois de suite les différences finies des deux membres de l'équation précédente, on trouvera

$$\begin{aligned}
\Delta y &= (a^h - 1)\, a^x,\\
\Delta^2 y &= (a^h - 1)\,\Delta.a^x = (a^h - 1)^2 a^x,\\
\Delta^3 y &= (a^h - 1)^2 \Delta.a^x = (a^h - 1)^3 a^x,
\end{aligned}$$

et, en général,

$$\Delta^n . a^x = (a^h - 1)^n a^x.$$

Cette dernière formule sera souvent employée dans ce qui va suivre.

Supposons en second lieu $y = au$; u désignant une fonction de x, et a une quantité constante, on trouvera successivement

$$\begin{aligned} \Delta y &= a\Delta u, \\ \Delta^2 y &= a\Delta^2 u, \\ \ldots\ldots &\ \ldots\ldots \\ \Delta^n y &= a\Delta^n u. \end{aligned}$$

De même, si l'on avait $y = u + v + w$, on en conclurait généralement

$$\Delta^n y = \Delta^n u + \Delta^n v + \Delta^n w,$$

et l'équation

$$y = au + bv + cw + \text{etc.}$$

entraînerait également la suivante,

$$\Delta^n y = a\Delta^n u + b\Delta^n v + c\Delta^n w + \text{etc.}$$

Il ne sera pas inutile de fixer un moment notre attention sur les différences finies des fonctions rationnelles et entières de la variable x.

Soit n le degré d'une semblable fonction, et

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l$$

cette fonction elle-même. Sa différence finie du premier ordre, en vertu de ce qui a été dit plus haut, sera un polynome en x du degré $n - 1$. Par la même raison, sa différence finie du second ordre sera un polynome en x du degré $n - 2$ etc. Enfin, la différence finie de l'ordre n sera un polynome du degré zéro, c'est-à-dire une quantité constante.

La différence finie de l'ordre n étant constante, toute

différence finie d'un ordre supérieur sera évidemment nulle. Ainsi les différences finies d'un polynome du degré n s'évanouissent lorsqu'elles sont d'un ordre supérieur à ce degré. Ce résultat subsiste évidemment dans le cas même où le polynome se réduirait à un seul terme. On trouvera, par exemple,

$$\Delta^{n+1}.x^n = 0, \ldots \quad \Delta^{n+2}.x^n = 0, \text{ etc.}$$

La différence finie de l'ordre n d'un polynome du degré n étant une quantité constante, on peut être curieux de connaître la valeur de cette même quantité. Soit donc

$$y = ax^n + bx^{n-1} \ldots + kx + l.$$

Si l'on prend n fois de suite les différences finies des deux membres de l'équation précédente, on aura

$$\Delta^n y = a\Delta^n.x^n + b\Delta^n.x^{n-1} \ldots + k\Delta^n x = a\Delta^n.x^n.$$

Reste maintenant à déterminer la valeur de $\Delta^n.x^n$; or on a déjà trouvé

$$\Delta.x^n = nhx^{n-1} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}h^2x^{n-2} + \text{etc.}$$

Si l'on prend $n - 1$ fois de suite la différence finie des deux membres de la formule précédente, en ayant égard aux équations

$$\Delta^{n-1}.x^{n-2} = 0, \quad \Delta^{n-1}.x^{n-3} = 0, \ldots \quad \Delta^{n-1}x = 0,$$

on obtiendra la suivante

$$\Delta^{n-1}.\Delta.x^n = nh\Delta^{n-1}.x^{n-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Delta^n.x^n = nh\Delta^{n-1}.x^{n-1}.$$

On trouvera de la même manière

$$\Delta^{n-1}.x^{n-1} = (n-1)h\Delta^{n-2}.x^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^2.x^2 = 2h\Delta x,$$
$$\Delta x = 1.h.$$

En multipliant respectivement ces diverses équations l'une par l'autre, et supprimant dans le résultat les facteurs communs, on trouvera

$$\Delta^n.x^n = 1.2.3\ldots(n-1)\,nh^n.$$

Cette valeur de $\Delta^n.x^n$, substituée dans la formule $\Delta^n y = a\,\Delta^n.x^n$, fera connaître la valeur de $\Delta^n y$ dans le cas où l'on suppose $y = ax^n + bx^{n-1}\ldots + \text{etc.}$, et l'on aura pour cette même valeur :

$$\Delta^n y = 1.2.3\ldots nah^n.$$

Supposons maintenant généralement

$$y = f(x).$$

Si l'on prend plusieurs fois de suite les différences finies des deux membres de l'équation précédente, on en conclura successivement,

$$\Delta y = \Delta.f(x) = f(x+h) - f(x),$$
$$\Delta^2 y = \Delta.f(x+h) - \Delta.f(x) = f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$
$$\Delta^3 y = \Delta.f(x+2h) - 2\Delta.f(x+h) + \Delta.f(x)$$
$$= f(x+3h) - f(x+2h) - 2f(x+2h) + 2f(x+h) + f(x+h) - f(x)$$
$$= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x),$$

et ainsi de suite.

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$f(x+h) = y_1, \quad f(x+2h) = y_2,$$

et en général

$$f(x+nh) = y_n,$$

les équations précédentes deviendront

$$\Delta y = y_1 - y,$$
$$\Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y,$$
$$\Delta^3 y = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y.$$

On trouvera de même, en général,

$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2} y_{n-2} \ldots \mp n y_1 \pm y.$$

Pour démontrer rigoureusement cette formule, on commencera par observer que la valeur de $\Delta^n y$, obtenue par des calculs semblables à ceux qui précèdent, est nécessairement une fonction linéaire des quantités $y, y_1, y_2, \ldots y_n$; puis on déterminera cette même fonction à l'aide du théorème suivant.

THÉORÈME I[er]. Pour déterminer une fonction linéaire des quantités $y, y_1, y_2, \ldots y_n$, il suffit de calculer la valeur particulière que reçoit cette fonction dans le cas où l'on suppose $y = a^x$; de remplacer, dans cette valeur particulière, a^x par l'unité, a^h par y; de développer le résultat obtenu suivant les puissances ascendantes de y, et de substituer dans le développement

$$\begin{array}{lll} y & \text{à} & y^0 = 1, \\ y_1 & \text{à} & y^1, \\ y_2 & \text{à} & y^2, \\ y_3 & \text{à} & y^3, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & \text{à} & y^n, \end{array}$$

c'est-à-dire de remplacer les exposants par des indices.

Démonstration. Soit en effet

$$Ay_0 + By_1 + Cy_2 \ldots = u$$

la fonction linéaire dont il s'agit, A, B, C, etc., désignant des quantités constantes. Si l'on fait $y = a^x$, on trouvera

$$y_1 = a^{x+h},$$
$$y_2 = a^{x+2h}, \text{ etc.},$$

et par suite la fonction u obtiendra la valeur particulière qui suit

$$a^x(\text{A} + \text{B}a^h + \text{C}a^{2h} + \ldots);$$

et pour en déduire la fonction proposée elle-même, il suffira évidemment de poser $a^x = 1, a^h = y$, et de remplacer les exposants de la lettre y par des indices, la variable $y = f(x)$ étant censée correspondre à l'indice o, ou, en d'autres termes, les deux expressions y_0 et y étant considérées comme synonymes.

Au moyen du théorème qu'on vient d'établir, on déterminera facilement la valeur de $\Delta^n y$ en fonction de

$$y, \; y_1, \; y_2, \ldots, \; y_n.$$

En effet, $\Delta^n y$ devant être une fonction linéaire de ces mêmes quantités, on pourra déduire sa valeur générale de la valeur particulière correspondante à $y = a^x$; or, en supposant $y = a^x$, on a déjà trouvé

$$\Delta^n y = a^x(a^h - 1)^n.$$

Si dans le second membre de cette équation on remplace a^x par l'unité, et a^h par y, on obtiendra la formule symbolique

$$\Delta^n y = (y - 1)^n.$$

Si l'on développe le second membre de cette formule suivant les puissances ascendantes de y, et que l'on remplace dans ce développement les exposants par des indices et y^0 par y, on trouvera, pour la valeur générale de $\Delta^n y$,

$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n}{1} \frac{(n-1)}{2} y_{n-2} \mp n y_1 \pm y.$$

Nous venonsd'exprimer $\Delta^n y$ en fonction de y, y_1, $y_{,\dots}$
On peut réciproquement exprimer y_n en fonction de y, Δy, $\Delta^2 y$, etc. On y parvient de la manière suivante : On tire de l'équation

$$\Delta y = y_1 - y, \qquad y_1 = y + \Delta y,$$

ou, si l'on fait $y = f(x)$,

$$f(x+h) = f(x) + \Delta . f(x).$$

Cette dernière équation subsiste, quelle que soit la fonction $f(x)$. Si l'on y met successivement à la place de $f(x)$

$$f(x+h), \quad f(x+2h), \quad f(x+nh),$$

on obtiendra les suivantes :

$$f(x+2h) = f(x+h) + \Delta . f(x+h),$$
$$f(x+3h) = f(x+2h) + \Delta . f(x+2h),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(x+nh) = f[x+(n-1)h] + \Delta . f[x+(n-1)h],$$

ou, ce qui revient au même,

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1,$$
$$y_3 = y_2 + \Delta y_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}.$$

Si dans la première des équations précédentes on remet pour y_1 sa valeur $y + \Delta y$, on trouvera

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y + \Delta y + \Delta y + \Delta^2 y = y + 2\Delta y + \Delta^2 y.$$

De même, si l'on remet cette valeur de y_2 dans l'équation

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2,$$

on trouvera

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y + 2\Delta y + \Delta^2 y + \Delta y + 2\Delta^2 y + \Delta^3 y$$
$$= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y.$$

En continuant de même on trouvera généralement

$$y_n = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \ldots + \frac{n}{1}\Delta^{n-1} y + \Delta^n y.$$

Pour démontrer rigoureusement cette formule, on commencera par observer que la valeur de y_n obtenue par des calculs semblables à ceux qui précèdent est nécessairement une fonction linéaire des quantités y, Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^n y$; puis l'on déterminera cette même fonction à l'aide du théorème suivant :

THÉORÈME 2me. Pour déterminer complétement une fonction linéaire des quantités y, Δy, $\Delta^2 y$, etc., il suffit de calculer la valeur particulière que reçoit cette fonction dans le cas où l'on pose $y = a^x$, de remplacer dans cette valeur particulière a^x par y, a^h par $1 + \Delta$, de développer le résultat obtenu suivant les puissances ascendantes de Δ, et de substituer dans ce développement, à chaque produit de la forme $\Delta^n \times y$, la différence finie $\Delta^n y$.

Démonstration. Soit

$$Ay + B\Delta y + C\Delta^2 y. \quad .$$

la fonction linéaire dont il s'agit. Sa valeur particulière correspondant au cas où l'on suppose $y = a^x$ sera

$$[A + B(a^h - 1) + C(a^h - 1)^2 \ldots] a^x.$$

Si, dans cette valeur particulière, on remplace a^x par y, a^h par $1 + \Delta$, on obtiendra l'expression

$$(A + B\Delta + C\Delta^2 + \ldots)y = Ay + B\Delta \times y + C\Delta^2 \times y \ldots$$

et si, dans cette dernière, on considère Δy, $\Delta^2 y$, etc., comme représentant, non les produits de Δ, Δ^2 par y, mais des différences finies du premier, du second ordre, etc., on retrouvera évidemment la fonction linéaire proposée.

Cherchons, à l'aide de ce théorème, la valeur générale de y_n en fonction de y, Δy, $\Delta^2 y \ldots$ On trouvera d'abord,

en faisant $y = a^x$,

$$y_n = a^{x+nh}.$$

Si, dans le second membre de cette équation, on remplace a^x par y, a^h par $1 + \Delta$, on obtiendra la formule symbolique

$$y_n = (1 + \Delta)^n y.$$

En développant cette dernière et substituant aux produits Δy, $\Delta^2 y$ les différences finies qui s'écrivent de la même manière, on trouvera

$$y_n = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\Delta^2 y + \ldots + \frac{n}{1}\Delta^{n-1} y + \Delta^n y;$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Dans la dernière leçon, nous avons démontré les deux équations

$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \ldots \mp \frac{n}{1} y_1 \pm y$$

$$= f(x + nh) + \frac{n}{1} f[x + (n-1)h] + \ldots \mp \frac{n}{1} f(x + h) \pm f(x),$$

$$y_n = f(x + nh) = y + \frac{n}{1}\Delta y + \ldots + \frac{n}{1}\Delta^{n-1} y + \Delta^n y,$$

et nous avons remarqué que l'on pouvait présenter ces deux équations sous une forme symbolique en écrivant

$$\Delta^n y = (y - 1)^n, \quad y_n = (1 + \Delta)^n y.$$

Nous allons maintenant donner quelques applications de ces mêmes formules.

Si l'on suppose dans la première $y = x^m$, m étant un nombre entier inférieur à n, $\Delta^n . x^m$ étant alors égal à zéro, on trouvera

$$(x + nh)^m - \frac{n}{1}[x + (n-1)h]^m \ldots \mp \frac{n}{1}(x + h)^m \pm x^m = 0.$$

Si l'on suppose au contraire $y = x^n$, on aura, comme on

l'a fait voir dans la dernière leçon,

$$\Delta^n . x^n = 1.2.3\ldots nh^n,$$

et par suite

$$(x+nh)^n - \frac{n}{1}[x+(n-1)h]^n \ldots \pm x^n = 1.2.3\ldots nh^n.$$

Si dans les formules précédentes on fait $x=0$, les deux membres de chacune d'elles deviennent divisibles par h^m ou h^n, et l'on en tirera

$$n^m - \frac{n}{1}(n-1)^m + \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}(n-2)^m - \text{etc.} = 0,$$

$$n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}(n-2)^n - \text{etc.} = 1.2.3\ldots n.$$

La dernière de celles-ci sert à démontrer le théorème de Wilson, savoir, que le produit $1.2.3\ldots n$, augmenté de l'unité, devient divisible par $n+1$, toutes les fois que $n+1$ est un nombre premier. Ainsi, par exemple, le produit $1.2.3.4=24$, augmenté de l'unité, devient divisible par 5. Le produit $1.2.3.4.5.6=720$, augmenté de l'unité, devient divisible par 7.

La démonstration de ce théorème, fondée sur la série que je viens de rapporter, a été donnée par Lagrange dans les Mémoires de Berlin, et par Euler dans ses Opuscules analytiques. Ceux qui desireront en connaître les détails les trouveront dans la *Théorie des nombres* de Legendre, à la tête de la seconde partie.

Je passe maintenant aux applications que l'on peut faire de la formule

$$f(x+nh) = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n}{1}\frac{(n-1)}{2}\Delta^2 y + \text{etc.}$$

Si l'on suppose dans cette formule $nh=k$, $x=x_0$ et que l'on désigne respectivement par $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0$, etc., ce que deviennent y, Δy, $\Delta^2 y$, etc., en vertu de l'hypothèse

$x = x_0$, on aura

$$f(x_0 + k) = y_0 + \frac{k}{1}\frac{\Delta y_0}{h} + \frac{k}{1}\cdot\frac{k-h}{2}\frac{\Delta^2 y_0}{h^2} + \ldots\ldots$$

Si l'on fait dans cette dernière $x_0 + k = X$, on trouvera

$$f(X) = y_0 + \frac{X - x_0}{1}\frac{\Delta y_0}{h} + \frac{(X - x_0)(X - x_0 - h)}{1.2}\frac{\Delta^2 y_0}{h^2} + \text{etc.}$$

Toutefois, cette dernière équation suppose que $X - x_0 = k$ est un multiple de h.

En recourant à des équations du genre de celles que nous avons déjà nommées équations symboliques, on peut retrouver d'une manière très élégante et très simple les deux formules fondamentales du calcul aux différences finies. La notation D_x indiquera, comme nous l'avons déjà admis, que l'on prend la dérivée par rapport à x, et les dérivées successives d'une fonction quelconque y de x seront représentées par les notations $D_x y, D_x^2 y, \ldots D_x^n y$. On aura dès-lors, en vertu de la formule de Taylor,

$$y + \Delta y = y + \frac{h}{1} D_x y + \frac{h^2}{1.2} D_x^2 y + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1 + \Delta) y = \left(1 + \frac{h}{1} D_x + \frac{h^2}{1.2} D_x^2 \ldots\right) y.$$

Cette équation symbolique subsiste quel que soit y, ce que l'on exprime en écrivant

$$1 + \Delta = 1 + \frac{h}{1} D_x + \frac{h^2}{1.2} D_x^2 + \text{etc.},$$

ou plus simplement

$$1 + \Delta = e^{hD_x}.$$

De cette dernière équation symbolique on tire

1°. $$\Delta = e^{hD_x} - 1,$$

et par conséquent

$$\Delta^n = (e^{hD_x} - 1)^n = e^{nhD_x} - \frac{n}{1} e^{(n-1)hD_x} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)h^2 D_x^2} \ldots \pm 1,$$

ou, ce qui revient au même, à cause des équations

$$y + \Delta y = f(x+h) = e^{hD_x} y, \quad f(x+nh) = y_n = e^{nhD_x} y,$$

$$\Delta^n y = e^{nhD_x} y - \frac{n}{1} e^{(n-1)hD_x} y + \text{etc.} \ldots \pm y = y_n + \frac{n}{1} y_{n-1} \ldots \pm y;$$

$$2^o.\ e^{nhD_x} = (1+\Delta)^n = 1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 \ldots + \Delta^n,$$

c'est-à-dire

$$e^{nhD_x} y = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$y_n = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y \ldots + \Delta^n y.$$

Nota. En indiquant par $D_x u$, $D_y u$, $D_z u$ les dérivées d'une fonction $u = F(x, y, z)$, prises par rapport à $x, y, z \ldots$, la formule de Taylor, étendue au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes, pourra se mettre sous la forme

$$\Delta u = e^{hD_x + iD_y + kD_z \ldots} - 1.$$

Nous verrons plus tard à combien d'heureuses transformations cette formule peut conduire, et quels immenses avantages on pourrait retirer de l'emploi habituel des notations D_x, D_y, D_z ....

PREMIÈRE NOTE.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE D'INTERPOLATION;

PAR M. CAUCHY.

Dans les applications de l'analyse à la Géométrie, à la Physique, à l'Astronomie,... deux sortes de questions se présentent à résoudre : il s'agit, 1° de trouver les lois générales des figures et des phénomènes, c'est-à-dire la forme générale des équations qui existent entre les diverses variables; par exemple, entre les coordonnées des courbes et des surfaces, entre les vitesses, le temps, les espaces parcourus par les mobiles, etc...; 2° de fixer en nombres les valeurs des paramètres ou constantes arbitraires qui entrent dans l'expression de ces mêmes lois, c'est-à-dire les valeurs des coefficients inconnus que renferment les équations trouvées. Parmi les variables on distingue ordinairement, comme l'on sait, celles qui peuvent varier indépendamment les unes des autres, et que l'on nomme pour cette raison variables indépendantes, d'avec celles qui s'en déduisent par la résolution des diverses équations, et qui se nomment fonctions des variables indépendantes. Considérons en particulier une de

ces fonctions, et supposons qu'elle se déduise des variables indépendantes par une équation ou formule qui renferme un certain nombre de coefficients. Un pareil nombre d'observations ou d'expériences, dont chacune fournira une valeur particulière de la fonction correspondante à un système particulier de valeurs des variables indépendantes, suffira pour la détermination numérique de tous ces coefficients; et, cette détermination faite, on pourra obtenir sans difficulté de nouvelles valeurs de la fonction correspondantes à de nouveaux systèmes de valeurs des variables indépendantes, et résoudre ainsi ce qu'on appelle le problème de l'interpolation. Par exemple, si l'ordonnée d'une courbe se trouve exprimée en fonction de l'abscisse par une équation qui renferme trois paramètres, il suffira de connaître trois points de la courbe, c'est-à-dire trois valeurs particulières de l'ordonnée correspondantes à trois valeurs particulières de l'abscisse, pour déterminer les trois paramètres; et, cette détermination effectuée, on pourra sans peine tracer la courbe par points en calculant les coordonnées d'un nombre aussi grand que l'on voudra de nouveaux points situés sur les arcs de cette courbe compris entre les points donnés. Ainsi, envisagé dans toute son étendue, le problème de l'interpolation consiste à déterminer les coefficients ou constantes arbitraires que renferme l'expression des lois générales des figures ou des phénomènes, d'après un nombre au moins égal de points donnés, ou d'observations, ou d'expériences. Dans une foule de questions les constantes arbitraires entrent au premier degré seulement dans les équations qui les renferment. C'est précisément ce qui arrive lorsqu'une fonction est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes d'une variable indépendante, ou bien encore suivant les sinus ou cosinus des multiples d'un même arc. Alors il s'agit de

déterminer les coefficients de ceux des termes de la série que l'on ne peut négliger sans avoir à craindre qu'il en résulte une erreur sensible dans les valeurs de la fonction. Dans le petit nombre de formules qui ont été proposées pour cet objet, on doit distinguer une formule tirée du calcul des différences finies, mais applicable seulement au cas où les diverses valeurs de la variable indépendante sont équidifférentes entre elles, et la formule de Lagrange applicable, quelles que soient ces valeurs, à des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable indépendante. Toutefois cette dernière formule elle-même se complique de plus en plus à mesure que l'on veut conserver dans le développement de la fonction en série un plus grand nombre de termes; et ce qu'il y a de plus fâcheux, c'est que les valeurs approchées des divers ordres correspondantes aux divers cas où l'on conserverait dans la série un seul terme, puis deux termes, puis trois termes,... s'obtiennent par des calculs à peu près indépendants les uns des autres, en sorte que chaque nouvelle approximation, loin d'être rendue facile par celles qui la précèdent, demande au contraire plus de temps et de travail. Frappé de ces inconvénients, et conduit par mes recherches sur la dispersion de la lumière à m'occuper de nouveau du problème de l'interpolation, j'ai eu le bonheur de rencontrer pour la solution de ce problème une nouvelle méthode qui, sous le double rapport de la certitude des résultats et de la facilité avec laquelle on les obtient, me paraît avoir sur les autres formules des avantages tellement incontestables, que je ne doute guère qu'elle ne soit bientôt d'un usage général parmi les personnes adonnées à la culture des sciences physiques et mathématiques.

Pour donner une idée de cette formule, je suppose qu'une fonction de x, représentée par y, soit développa-

ble en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes de x, ou bien encore suivant les sinus ou cosinus des arcs multiples de x, ou même, plus généralement, suivant d'autres fonctions de x que je représenterai par

$$\varphi(x) = u, \quad \chi(x) = v, \quad \psi(x) = w, \ldots,$$

en sorte qu'on ait

$$(1) \qquad y = au + bv + cw + \ldots,$$

a, b, c,... désignant des coefficients constants. Il s'agit de savoir, 1° combien de termes on doit conserver dans le second membre de l'équation (1) pour obtenir une valeur de y suffisamment approchée, dont la différence avec la valeur exacte soit insensible et comparable aux erreurs que comportent les observations; 2° de fixer en nombres les coefficients des termes conservés, ou, ce qui revient au même, de trouver la valeur approchée dont nous venons de parler. Les données du problème sont un nombre suffisamment grand de valeurs de y représentées par

$$y_1, \; y_2, \ldots \; y_n,$$

et correspondantes à un pareil nombre n de valeurs de x représentées par x_1, x_2, . . . x_n, par conséquent aussi à un pareil nombre de valeurs de chacune des fonctions u, v, w, . . . valeurs que je représenterai de même par

$$u_1, \; u_2, \ldots \; u_n$$

pour la fonction u, par

$$v_1, \; v_2, \ldots \; v_n$$

pour la fonction v, etc. Ainsi, pour résoudre le problème, on aura entre les coefficients inconnus a, b, c,...

les n équations du premier degré

$$\begin{aligned} y_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1 + \ldots, \\ y_2 &= au_2 + bv_2 + cw_2 + \ldots, \\ &\vdots \\ y_n &= au_n + bv_n + cw_n + \ldots, \end{aligned}$$

qui, si l'on désigne par i l'un quelconque des nombres entiers

$$1,\ 2, \ldots n,$$

se trouveront toutes comprises dans la formule générale

$$y_i = au_i + bv_i + cw_i + \ldots$$

On effectuera la première approximation en négligeant les coefficients $b, c, \ldots$, ou, ce qui revient au même, en réduisant la série à son premier terme. Alors la valeur générale approchée de y sera

$$y = au;$$

et, pour déterminer le coefficient a, on aura le système des équations

$$(2) \qquad y_1 = au_1, \quad y_2 = au_2, \ldots \quad y_n = au_n.$$

Les diverses valeurs de a, que l'on peut déduire de ces équations considérées chacune à part, ou combinées entre elles, seraient toutes précisément égales si les valeurs particulières de y, que nous supposons données par l'observation, étaient rigoureusement exactes. Mais il n'en est pas ainsi dans la pratique, où les observations comportent des erreurs renfermées entre certaines limites; et alors il importe de combiner entre elles ces équations de manière que, dans les cas les plus défavorables, l'influence exercée sur la valeur du coefficient a par les erreurs commises sur les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, soit la moindre possible. Or, les diverses combinaisons que l'on

peut faire des équations (2) pour en tirer une nouvelle équation du premier degré, par rapport à a, fournissent toutes des valeurs de a comprises dans la formule générale

$$a = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots k_n y_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots k_n u_n},$$

que l'on obtient en ajoutant membre à membre les équations (2) après les avoir respectivement multipliées par des facteurs constants k_1, $k_2 \ldots$, k_n. Il y a plus; comme la valeur de a déterminée par cette équation ne varie pas quand on fait varier simultanément les facteurs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dans le même rapport, il est clair que parmi ces facteurs, le plus grand (abstraction faite du signe) peut toujours être censé réduit à l'unité. Remarquons enfin que, si l'on nomme

$$\varepsilon_1, \; \varepsilon_2, \ldots, \; \varepsilon_n,$$

les erreurs respectivement commises dans les observations sur les valeurs de

$$y_1, \; y_2, \ldots, \; y_n,$$

la formule précédente fournira pour a une valeur approchée, dont la différence avec la véritable sera

$$\frac{k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 + \ldots + k_n \varepsilon_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n}.$$

Il faut maintenant choisir k_1, k_2, ..., k_n de telle sorte que, dans les cas les plus défavorables, la valeur numérique de cette différence soit la moindre possible.

Représentons par

$$\mathrm{S} u_i$$

la somme des diverses valeurs numériques de u_i, c'est-à-dire ce que devient le polynome

$$\pm u_1 \pm u_2 \pm \ldots \pm u_n$$

quand on y dispose de chaque signe de manière à rendre chaque terme positif. Représentons par $S\varepsilon_i$ non la somme des valeurs numériques $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, mais ce que devient la somme Su_i quand on y remplace chaque valeur de u_i par la valeur correspondante de ε_i. Si l'on réduit à $+1$ ou à -1 chacun des coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_n$, en choisissant les signes de manière que, dans le dénominateur de la fraction

$$\frac{k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \ldots + k_n\varepsilon_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n}$$

tous les termes soient positifs, cette fraction sera réduite à

$$\frac{S\varepsilon_i}{Su_i}$$

et elle offrira une valeur numérique tout au plus égale au rapport

$$\frac{E}{Su_i},$$

si l'on désigne par E la somme des valeurs numériques de ε_i, ou, ce qui revient au même, la valeur numérique de $S\varepsilon_i$ dans le cas le plus défavorable. D'autre part, en attribuant à $k_1, k_2 \ldots, k_n$ des valeurs inégales dont la plus grande (abstraction faite des signes) soit l'unité, on obtiendra pour dénominateur de la fraction une quantité dont la valeur numérique sera évidemment inférieure à Su_i, tandis que la valeur numérique du numérateur pourra s'élever jusqu'à la limite E; ce qui arrivera effectivement si les erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, sont toutes nulles, à l'exception de celle qui sera multipliée par un facteur égal, au signe près, à l'unité. Il en résulte que la plus grande erreur à craindre sur la valeur de a déterminée par la formule

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n}$$

sera la moindre possible si l'on pose généralement

$$k_i = \pm 1,$$

en choisissant les signes de manière que dans le polynome

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n,$$

tous les termes soient positifs. Alors cette formule donnera

$$a = \frac{Sy_i}{Su_i},$$

Sy_i étant ce que devient la somme Su_i quand on y remplace chaque valeur de u_i par la valeur correspondante de y_i, et l'équation $y = au$ deviendra

$$y = \frac{u}{Su_i} Sy_i.$$

Si l'on fait pour abréger

$$\alpha = \frac{u}{Su_i},$$

on aura simplement

$$y = \alpha Sy_i.$$

Si l'on supposait généralement $u = 1$, l'équation $y = au$, réduite à

$$y = a,$$

exprimerait que la valeur de y est constante; et comme on aurait alors

$$\alpha = \frac{u}{Su_i} = \frac{1}{n},$$

la formule $y = \alpha Sy_i$ donnerait

$$y = \frac{1}{n} Sy_i.$$

Donc alors on devrait prendre pour valeur approchée de

y la moyenne arithmétique entre les valeurs observées; et la plus grande erreur à craindre serait plus petite pour cette valeur approchée que pour toute autre. Cette propriété des moyennes arithmétiques, jointe à la facilité avec laquelle on les calcule, justifie complétement l'usage où l'on est de leur accorder la préférence dans l'évaluation des constantes arbitraires qui peuvent être déterminées directement par l'observation.

Soit maintenant Δy le reste qui doit compléter la valeur approchée de y fournie par l'équation

$$y = \alpha S y_i,$$

en sorte qu'on ait

$$y = \alpha S y_i + \Delta y.$$

Posons de même

$$v = \alpha S v_i + \Delta v, \quad w = \alpha S w_i + \Delta w, \text{ etc.}$$

On tirera de la formule $y_i = au_i + bv_i + cw_i + \text{etc.}$,

$$S y_i = a S u_i + b S v_i + c S w_i + \text{etc.};$$

puis de cette dernière, multipliée par α, et soustraite de l'équation $y = au + bv + bw + \text{etc.}$,

$$(3) \qquad \Delta y = b \Delta v + c \Delta w + \text{etc.}$$

Soient d'ailleurs α_i, Δy_i, Δv_i, Δw_i,... ce que deviennent les valeurs de α, Δy, Δv, Δw,... tirées des équations qui précèdent, quand on y remplace x par x_i, i étant l'un des nombres entiers 1, 2,...n. Si les valeurs de

$$\Delta y_1, \quad \Delta y_2, \ldots, \quad \Delta y_n$$

sont très petites, et comparables aux erreurs que comportent les observations, il sera inutile de procéder à une seconde approximation, et l'on pourra s'en tenir à la valeur approchée de y fournie par l'équation $y = \alpha S y_i$. Si

le contraire a lieu, il suffira, pour obtenir une approximation nouvelle, d'opérer sur la formule (3), comme dans la première approximation l'on a opéré sur la formule $y = au + bv + cw +$ etc.

Cela posé, désignons par

$$S'\Delta v_i$$

la somme des valeurs numériques de Δv_i ; et par

$$S'\Delta y_i, \quad S'\Delta w_i, \text{ etc.},$$

les polynomes dans lesquels se change la somme $S'\Delta v_i$ quand on y remplace chaque valeur de Δv_i par la valeur correspondante de Δy_i ou de Δw_i,...; soit enfin

$$\text{6} = \frac{\Delta v}{S'\Delta v_i}:$$

si l'on peut, sans erreur sensible, négliger dans la série (1) le coefficient c du troisième terme et ceux des termes suivants, on devra prendre pour valeur approchée de Δy

$$\Delta y = \text{6}S'\Delta y_i.$$

Soit $\Delta^2 y$ le reste du second ordre qui doit compléter cette valeur approchée, et faisons en conséquence

$$\Delta y = \text{6}S'\Delta y_i + \Delta^2 y.$$

Posons de même

$$\Delta w = \text{6}S'\Delta w_i + \Delta^2 w, \text{ etc.}:$$

on tirera successivement de la formule (3)

$$\Delta y_i = b\Delta v_i + c\Delta w_i + \text{etc.},$$
$$S'\Delta y_i = bS'\Delta v_i + cS'\Delta w_i + \text{etc.};$$

puis cette dernière, multipliée par 6 et retranchée de l'équation $\Delta y = b\Delta v + c\Delta w +$ etc.,

$$\Delta^2 y = c\Delta^2 w + \text{etc.}$$

Soient d'ailleurs ϵ_i, $\Delta^2 y_i$, $\Delta^2 w_i, \ldots$, ce que deviennent les valeurs de ϵ, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 w, \ldots$, tirées des équations qui précèdent, quand on y remplace x par x_i, i étant l'un des nombres entiers $1, 2, \ldots n$. Si les valeurs de

$$\Delta^2 y_1, \quad \Delta^2 y_2, \ldots, \Delta^2 y_n$$

sont très petites et comparables aux erreurs que comportent les observations, il sera inutile de procéder à une nouvelle approximation, et l'on pourra s'en tenir à la valeur approchée de Δy fournie par l'équation $\Delta y = \epsilon S' \Delta y_i$. Si le contraire a lieu, il suffira, pour obtenir une troisième approximation, d'opérer sur la formule qui donne $\Delta^2 y$, comme on a opéré dans la première approximation sur la formule (1). En continuant de la sorte, on obtiendra la règle suivante :

L'inconnue y, fonction de la variable x, étant supposée développable en une série convergente

$$\text{(I)} \qquad au + bv + cw + \ldots,$$

où u, v, $w, \ldots$, représentent des fonctions données de la même variable, si l'on connaît n valeurs particulières de y correspondantes à n valeurs particulières

$$x_1, \ x_2, \ldots, \ x_n$$

de x, si d'ailleurs on nomme i l'un quelconque des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$, et y_i, u_i, $v_i, \ldots$, ce que deviennent y, u, $v, \ldots$, quand on y remplace x par x_i; alors, pour obtenir la valeur générale de y avec une approximation suffisante, on déterminera d'abord le coefficient α à l'aide de la formule

$$\text{(II)} \qquad u = \alpha S u_i,$$

dans laquelle Su_i désigne la somme des valeurs numériques de u_i, et la différence du premier ordre Δy à l'aide

de la formule

$$\text{(III)} \qquad y = \alpha S y_i + \Delta y.$$

Si les valeurs particulières de Δy, représentées par Δy_1, $\Delta y_2, \ldots, \Delta y_n$, sont comparables aux erreurs d'observation, on pourra négliger Δy et réduire la valeur approchée de y à

$$\alpha S y_i.$$

Dans le cas contraire, on déterminera β à l'aide des formules

$$\text{(IV)} \qquad v = \alpha S v_i + \Delta v, \quad \Delta v = \beta S' \Delta v_i,$$

$S'\Delta v_i$ étant la somme des valeurs numériques de Δv_i, et la différence du second ordre $\Delta^2 y$ à l'aide de la formule

$$\text{(V)} \qquad \Delta y = \beta S' \Delta y + \Delta^2 y.$$

Si les valeurs particulières de $\Delta^2 y$, représentées par $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2, \ldots, \Delta^2 y_n$, sont comparables aux erreurs d'observation, on pourra négliger $\Delta^2 y$ et réduire en conséquence la valeur approchée de y à $\alpha S y_i + \beta S' \Delta y_i$.

Dans le cas contraire, on déterminera γ par les formules

$$\text{(VI)} \quad w = \alpha S w_i + \Delta w, \quad \Delta w = \beta S' \Delta w_i + \Delta^2 w, \quad \Delta^2 w = \gamma S'' \Delta^2 w_i,$$

$S''\Delta^2 w_i$ étant la somme des valeurs numériques de $\Delta^2 w_i$, et la différence du troisième ordre $\Delta^3 y$ par la formule

$$\text{(VII)} \qquad \Delta^2 y = \gamma S'' \Delta^2 y_i + \Delta^3 y \text{ etc.}$$

Ainsi, en définitive, en supposant les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ déterminés par le système de ces équations, etc., on devra calculer les différences des divers ordres représentées par

$$\Delta y, \ \Delta^2 y, \ \Delta^3 y, \ldots$$

ou plutôt leurs valeurs particulières correspondantes aux valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable x, jusqu'à ce que l'on parvienne à une différence dont les valeurs particu-

lières soient comparables aux erreurs d'observation. Alors il suffira d'égaler à zéro la valeur de cette différence tirée du système des équations (III), (V), (VII),... pour obtenir avec une approximation suffisante la valeur de y. Cette valeur générale sera donc

$$y = \alpha \mathrm{S} y_i, \quad \text{ou} \quad y = \alpha \mathrm{S} y_i + \beta \mathrm{S}' \Delta y_i, \quad \text{ou} \quad \text{etc.},$$

suivant que l'on pourra, sans erreur sensible, réduire la série à son premier terme, ou à ses deux premiers termes... Donc, si l'on nomme m le nombre des termes conservés, le problème de l'interpolation sera résolu par la formule

$$y = \alpha \mathrm{S} y_i + \beta \mathrm{S}' \Delta y_i + \gamma \mathrm{S}'' \Delta^2 y_i + \text{etc.},$$

le second membre étant prolongé jusqu'au terme qui renferme $\Delta^{m-1} y_i$.

Il est bon d'observer que des formules précédentes on tire non-seulement

$$\mathrm{S}\alpha_i = 1\,; \quad \mathrm{S}\beta_i = 0, \quad \mathrm{S}'\beta_i = 1\,; \quad \mathrm{S}\gamma_i = 0, \quad \mathrm{S}'\gamma_i = 0, \quad \mathrm{S}''\gamma_i = 1, \text{etc.}\,;$$

mais encore

$$\mathrm{S}\Delta v_i = 0\,; \quad \mathrm{S}\Delta w_i = 0, \quad \mathrm{S}\Delta^2 w_i = 0, \quad \mathrm{S}'\Delta^2 w_i = 0, \text{ etc.}\ldots,$$

et

$$\mathrm{S}\Delta y_i = 0\,; \mathrm{S}\Delta^2 y_i = 0, \mathrm{S}'\Delta^2 y_i = 0, \mathrm{S}\Delta^3 y_i = 0, \mathrm{S}'\Delta^3 y_i = 0, \mathrm{S}''\Delta^3 y_i = 0, \ldots$$

Ces dernières formules sont autant d'équations de condition auxquelles doivent satisfaire les valeurs particulières de α, β, γ,..., ainsi que celles des différences des divers ordres de u, v, w,..., y; et il en résulte qu'on ne peut commettre dans le calcul de ces valeurs particulières aucune erreur de chiffres sans en être averti par le seul fait que les équations de condition cessent d'être vérifiées.

En résumé, les avantages des nouvelles formules d'interpolation sont les suivants :

1°. Elles s'appliquent aux développements en séries, quelle que soit la loi suivant laquelle les différents termes

se déduisent les uns des autres, et quelles que soient les valeurs équidifférentes ou non de la variable indépendante;

2°. Les nouvelles formules sont d'une application très facile, surtout quand on emploie les logarithmes pour le calcul des rapports α, β, γ,..., et des produits de ces rapports par les sommes des diverses valeurs des fonctions ou de leurs différences. Alors, en effet, toutes les opérations se réduisent à des additions ou à des soustractions.

3°. A l'aide de ces formules les approximations successives s'exécutent avec une facilité de plus en plus grande, attendu que les différences des divers ordres vont généralement en diminuant;

4°. Ces formules permettent d'introduire à la fois dans le calcul les nombres fournis par toutes les observations données, et d'augmenter ainsi l'exactitude des résultats en faisant concourir à ce but un très grand nombre d'expériences;

5°. Elles offrent encore cet avantage, qu'à chaque approximation nouvelle, les valeurs qu'elles fournissent pour les coefficients a, b, c,... sont précisément celles pour lesquelles la plus grande erreur à craindre est la moindre possible;

6°. Ces formules indiquent d'elles-mêmes le moment où le calcul doit s'arrêter, en fournissant alors des différences comparables aux erreurs d'observation;

7°. Enfin les quantités qu'elles déterminent satisfont à des équations de condition qui ne permettent pas de commettre la plus légère faute de calcul, sans que l'on s'en aperçoive presque immédiatement.

On trouvera dans les nouveaux *Exercices de Mathématiques* de nombreuses applications de ces formules d'interpolation.

DEUXIÈME NOTE.

SUR LA

CONDITION DE CONVERGENCE

DE LA SÉRIE QUI DONNERAIT LE DÉVELOPPEMENT DE LA PLUS PETITE RACINE DE L'ÉQUATION $y = x \cos y$.

Si ce volume, dont j'aurais voulu faire l'expression complète de la science actuelle, n'avait pas crû au-delà de toutes mes prévisions, j'aurais placé ici une exposition simple et facile de deux des plus importants travaux de M. Cauchy, ayant pour objet la résolution des équations littérales ou numériques de tous les degrés, et des équations transcendantes. Forcé de m'arrêter, je donnerai seulement un exemple de la résolution des équations transcendantes; cette application est d'autant plus nécessaire, qu'elle complétera une des plus belles théories exposées dans ces leçons.

Nous avons dit que la plus petite racine y_0 de l'équation $y = x \cos y$ sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x pour tout module inférieur au plus petit de ceux qui répondent aux équations simultanées:

$$x = \frac{y}{\cos y}, \quad \frac{\cos y}{y} = -\sin y,$$

dont la seconde peut être réduite à $\cot y = -y$, ou peut être remplacée par la formule

$$\cos y + y \sin y = 0.$$

Quand on développe $\sin y$ et $\cos y$, cette dernière formule devient

$$1 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{y^6}{6} \ldots = 0.$$

Or si l'on nomme Y le module de la variable réelle ou imaginaire y, le module du polynome qui précède ne pourra pas surpasser la somme des modules de ses divers termes, savoir

$$1 + \frac{Y^2}{2} + \frac{1}{1.2}\frac{Y^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{Y^6}{6} + \text{etc.}$$

D'où il résulte que l'équation $\cot y = -y$ n'admettra point de racines réelles ou imaginaires dont les modules soient inférieurs à la racine positive unique de l'équation

$$\frac{Y^2}{2} + \frac{1}{1.2}\frac{Y^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{Y^6}{6} + \ldots = 1,$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$\frac{e^{Y} + e^{-Y}}{2} - Y\frac{e^{Y} - e^{-Y}}{2} = 0,$$

qu'on peut encore présenter sous l'une ou l'autre des deux formes

$$Y = 1 + \frac{2}{e^{2Y} - 1}, \quad 2Y - l(Y+1) + l(Y-1) = 0.$$

D'ailleurs cette racine, supérieure à l'unité, en vertu de la formule

$$Y = 1 + \frac{2}{e^{2Y} - 1},$$

sera, en vertu de la formule

$$\frac{Y^2}{2}+\frac{1}{1.2}\frac{Y^4}{4}+\frac{1}{1.2.3.4}\frac{Y^6}{6}+\ldots=1,$$

inférieure à la racine positive de l'équation

$$\frac{Y^2}{2}+\frac{1}{1.2}\frac{Y^4}{4}=1,$$

c'est-à-dire au nombre $\sqrt{-\;+2\sqrt{1.2}}=1,2100\ldots$; et si l'on pose dans l'équation $2Y-l(Y+1)+l(Y-1)=0$, $Y=1,2+i$, i sera renfermé entre les limites $-0,2$ et $0,1$. Cela posé, en considérant $1,2$ comme une première valeur approchée de la racine positive Y de cette dernière équation, on obtiendra facilement, par l'emploi de la formule de Taylor, de nouvelles valeurs de plus en plus approchées. En effet, désignons par $F(Y)$ le premier membre de cette équation, par a la valeur approchée de la racine Y, et par $a+i$ sa valeur exacte, on aura

$$F(Y)=F(a+i)=F(a)+iF'(a+\theta i);$$

θ indiquant un nombre inférieur à l'unité, et les valeurs de $F'(Y)$, $F'(a+\theta i)$ étant

$$F'(Y)=\frac{2}{1-Y^{-2}},\quad F'(a+\theta i)=\frac{2}{1-(a+\theta i)^{-2}}.$$

Dès-lors l'équation $F(Y)=0$ donnera

$$i=-\frac{1-(a+\theta i)^{-2}}{2}F(a),$$

et comme on aura encore

$$a=1,2,\ F(a)=2a-l\left(\frac{a+1}{a-1}\right)=2,4-l(11)=0,002105,$$

on trouvera définitivement

$$i = -0,002105\,\frac{1-(1,2+i)^{-2}}{2}.$$

En vertu de cette dernière équation, non-seulement i sera négatif, mais de plus sa valeur numérique sera inférieure au produit

$$0,002105\,\frac{1-(1,2)^{-2}}{2} = 0,0003216,$$

et par suite supérieure au produit

$$0,002105\,\frac{1-(1,2-0,0003216)^{-2}}{2} = 0,0003212\ldots$$

Donc, en poussant l'approximation jusqu'aux millionièmes, on aura

$$i = -0,000321,\quad Y = 1,2 - 0,000321\ldots = 1,199678\ldots$$

Cette dernière valeur de Y représente donc une limite inférieure que ne peuvent pas dépasser les modules des valeurs de Y qui vérifient l'équation

$$\cot y = -y \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{1.2}\frac{y^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{y^6}{6} - \ldots = 0.$$

Mais ces modules peuvent atteindre la limite dont il s'agit, puisqu'on satisfait à la dernière de ces équations en supposant $y = Y\sqrt{-1} = 1,199678\ldots\sqrt{-1}$, ou en prenant pour Y la racine positive de l'équation

$$\frac{Y^2}{2} + \frac{1}{1.2}\frac{Y^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{Y^6}{6} + \ldots = 0.$$

Ce n'est pas tout; comme, en vertu des équations

$$y = x\cos y, \quad \cos y + y\sin y = 0,$$

on a

$$x = \frac{y}{\cos y} = \frac{-1}{\sin y},$$

on en conclura

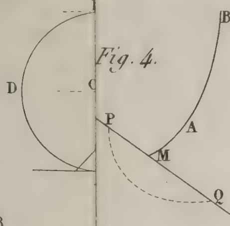
$$x^2 = \frac{y^2}{\cos^2 y} = \frac{1}{\sin^2 y} = \frac{y^2+1}{\cos^2 y + \sin^2 y} = y^2 + 1,$$

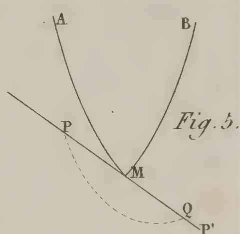
et par conséquent, si l'on suppose le module Y de y égal ou supérieur au nombre 1,199 678..., le module correspondant de x sera égal ou supérieur à

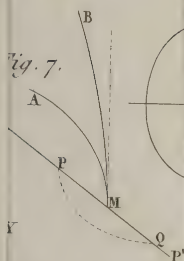
$$\sqrt{Y^2 - 1} = \sqrt{(1,199678\ldots)^2 - 1} = 0,662\,742\ldots,$$

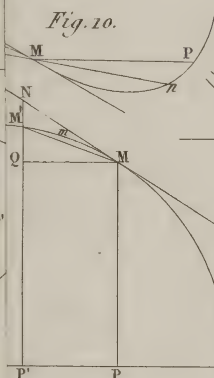
qu'il atteindra, si l'on suppose $y = 1,199\,678\ldots\sqrt{-1}$. Donc le plus petit des modules de x qui répondent aux équations $y = x \cos y$, $\cot y = -y$, sera 0,662 742..., et par conséquent la plus petite racine de l'équation $y = x \cos y$ sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x pour tout module de x inférieur au nombre 0,662742..., et l'on se trouve ainsi ramené immédiatement à un résultat auquel M. Laplace est parvenu par une analyse pénible et des calculs assez longs, dans ses deux Mémoires sur la convergence de la série qui fournit le développement du rayon vecteur d'une planète suivant les puissances ascendantes de l'excentricité.

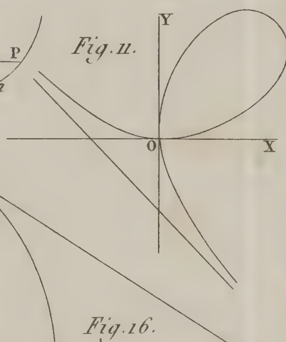
FIN DU PREMIER VOLUME.

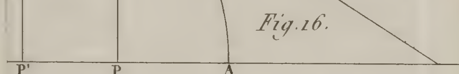

Fig. 4.
B
D
P
A
M
Q
P'

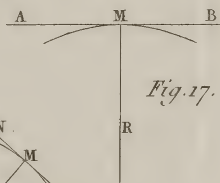

A
B
Fig. 5.
P
M
Q
P'

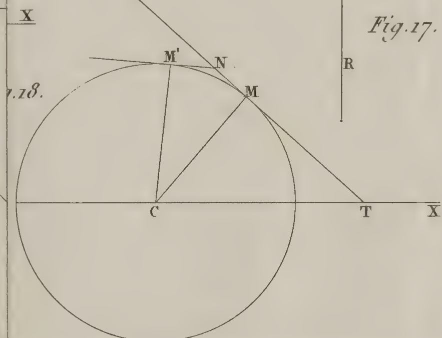

B
A
P
M
Q
P'

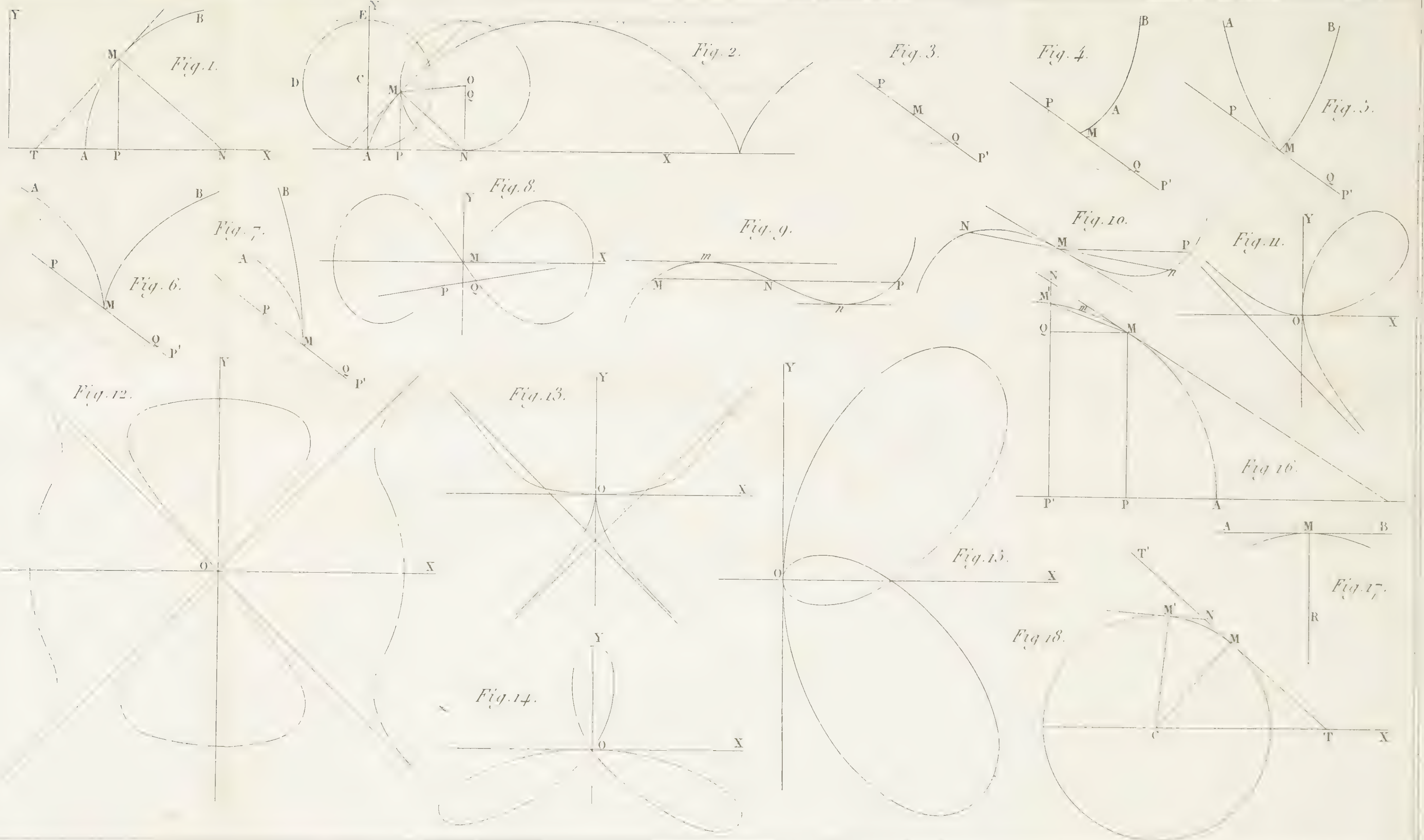

Fig. 10.
M
P
n
N
M'
m
Q
M


Y
Fig. 11.
O
X
Fig. 16.


P'
P
A


A
M
B
Fig. 17.
R


T'
M'
N
M
C
T
X


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

LLOARD SC.

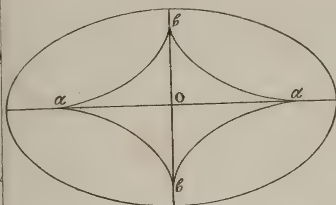


Fig. 23.

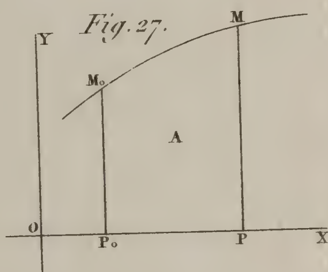


Fig. 27.

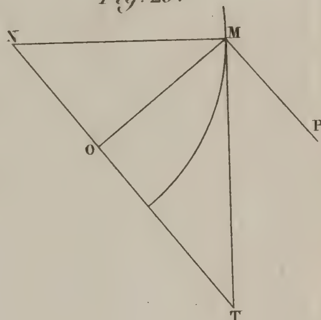


Fig. 28.

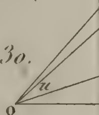


Fig. 30.

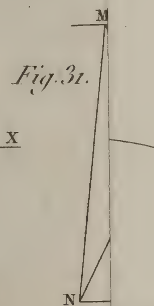


Fig. 31.

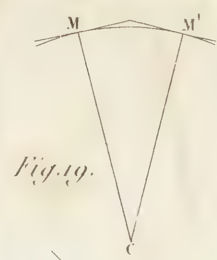


Fig. 19.

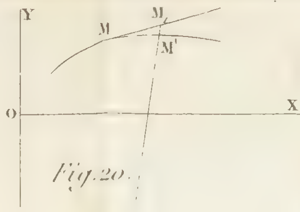


Fig. 20.



Fig. 21.

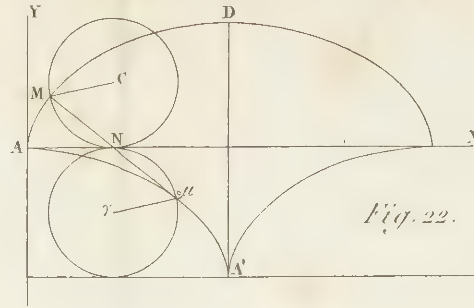


Fig. 22.

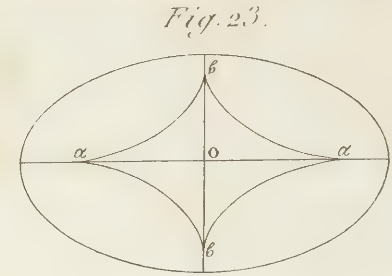


Fig. 23.

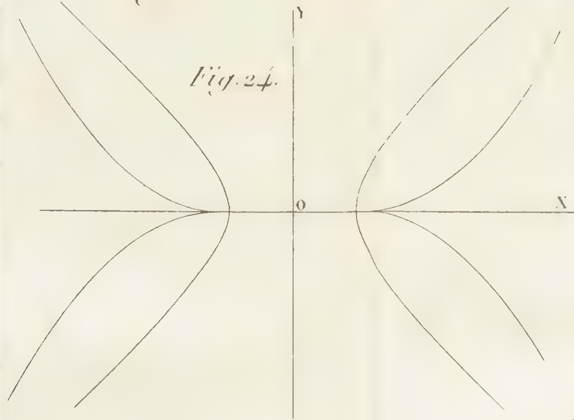


Fig. 24.

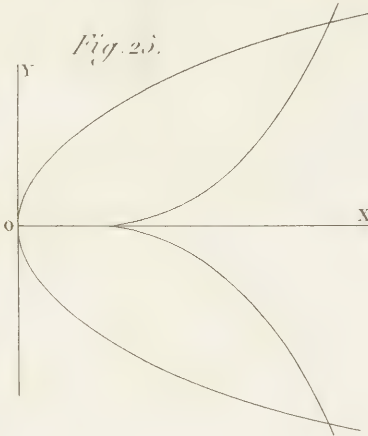


Fig. 25.

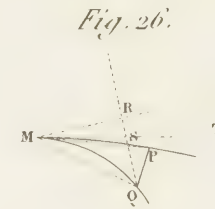


Fig. 26.

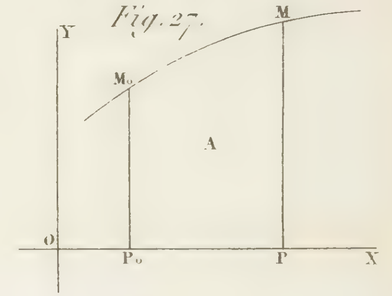


Fig. 27.

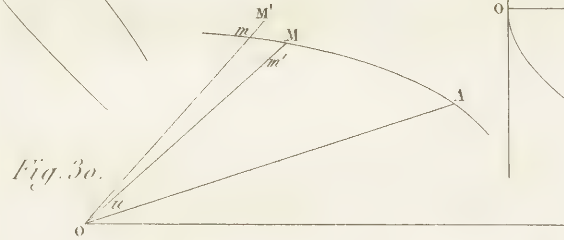


Fig. 30.

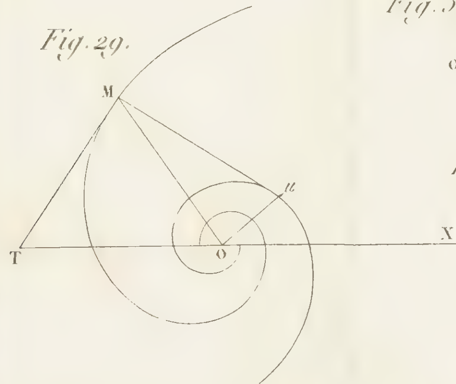


Fig. 29.

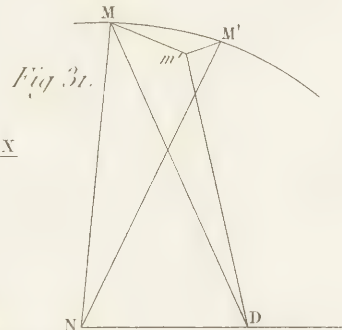


Fig. 31.

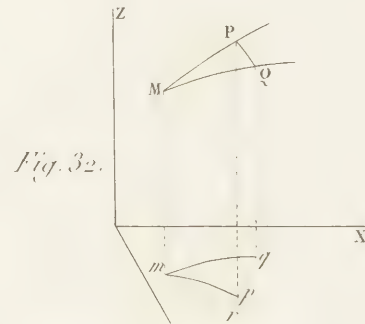


Fig. 32.

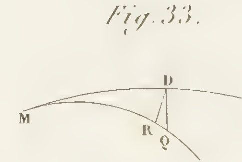


Fig. 33.

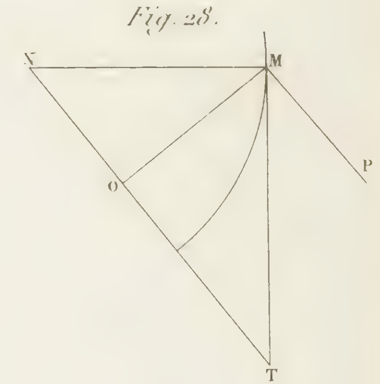


Fig. 28.

CLOARD SC.

